Diskrete Mathematik Skript SS05/WS05

für die Vorlesung von Professor Schmitz

Skript von Michael Barth
Das 1. Kapitel entstand auf der Basis von Janine Griesser's Skript,
vielen Dank dafür.

Besonderen Dank an Patrick Bader
der mir seine Aufschriebe geliehen und beim korrigieren geholfen hat. =)

Table of Contents

1. Mengen, Relationen, Abbildungen

1.1 Grundlagen

Definition

CANTOR (Gründer der Mengenlehre)

„Eine Menge M ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterscheidbaren Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens.“
Ist ein Objekt x Element einer Menge M, schreiben wir $x \in M$ oder $M \ni x$ (M enthält x). Enthält M die Elemente $x_1, \ldots, x_n$, schreiben wir $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Beispiel

i. $M = \{1,2,3,4,5,6\}$

ii. $M = \{\text{Alle MI-Studenten der HdM}\}$

iii. Lege Menge durch bestimmte Eigenschaften fest, z.B. $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ Primzahl}\}$ oder $\{0,1,2,3,4\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4\}$

iv. $M = \{x \in M \mid x = 2k+1 \text{ und } k \in \mathbb{N}\}$

v. Natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$
Ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{0,1,-1,2,-2,\ldots\}$
Rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p,q \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{0,1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\ldots\right\}$
Reelle Zahlen $\mathbb{R} = \{\text{Alle Zahlen der Zahlengerade}\}$
Leere Menge $M = \{\} = \emptyset$

Defintion

- M_1 heißt **Teilmenge** von M_2 (in Zeichen $M_1 \subseteq M_2$) genau dann, wenn gilt: Jedes Element von M_1 ist auch ein Element von M_2.
- M_1 und M_2 heißen **gleich** (in Zeichen $M_1 = M_2$) genau dann, wenn M_1 und M_2 die gleichen Elemente enthalten.

Satz

M_1 und M_2 seien Mengen. Dann gilt:
$M_1 = M_2$ genau dann, wenn $M_1 \subseteq M_2$ und $M_2 \subseteq M_1$.

Beweis

i. " $\Rightarrow$ ": Sei $M_1 = M_2$.
Da M_2 die gleichen Elemente wie M_1 enthält $\Rightarrow M_1 \subseteq M_2$
Da M_1 die gleichen Elemente wie M_2 enthält $\Rightarrow M_2 \subseteq M_1$

ii. " $\Leftarrow$ ": Sei $M_1 \subseteq M_2$ und $M_2 \subseteq M_1$. Annahme: $M_1 \neq M_2$
Dann existiert ein Element $x \in M_1$ mit $x \notin M_2$ (indirekter Beweis).

Beispiel

i. $M_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$M_2 = \{2, 3, 5, 1, 4, 6\}$
$M_3 = \{6, 3, 4\}$
$M_1 = M_2, M_3 \subseteq M_1$

ii. $M_1 = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist durch } 2 \text{ teilbar}\}$
$M_2 = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist durch } 4 \text{ teilbar}\}$

$M_1 = M_2$? Nein, denn $6 \in M_1$, aber $6 \notin M_2$.
$M_2 \subseteq M_1$, denn: Sei $x \in M_2$, also x durch 4 teilbar, d.h. es gibt ein k mit
$x = 4 \cdot k$
$x = 2 \cdot 2 \cdot k$
$x = 2 \cdot l \,(mit\, l = 2\text{k})$
also x durch 2 teilbar.

1.2 Mengenoperationen

Definition

S , T seien Mengen.

- Der **Durchschnitt** (oder die **Schnittmenge**) von S und T ist die Menge der Elemente, die sowohl zu S als auch zu T gehören:
  $S \cap T = \{x \mid x \in S \text{ und } x \in T\}$
- Die **Vereinigungsmenge** von S und T ist die Menge der Elemente, die zu S oder T gehören:
  $S \cup T = \{x \mid x \in S \text{ oder } x \in T\}$
- Die **Differenzmenge** von S und T ist die Menge der Elemente von S die nicht zu T gehören:
  $S \setminus T = \{x \in S \mid x \notin T\}$
- Das **Komplement** von S ist die Menge $\bar{S} = \{x \mid x \notin S\}$

Beispiel

i. $\{1,3,5\}\cap\{3,5,7\}=\{3,5\}$

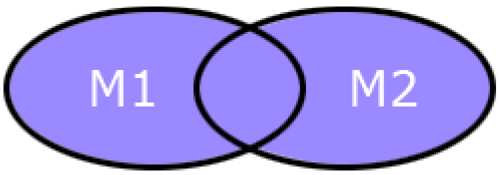
ii. $\{1,3,5\}\cup\{3,5,7\}=\{1,3,5,7\}$

iii. $\{1,3,5\}\setminus\{3,5,7\}=\{1\}$

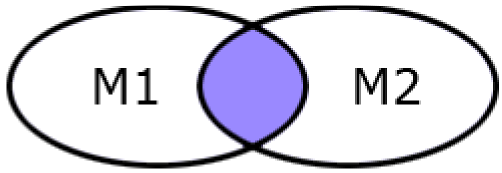
iv. $S=\{x\in\mathbb{N} \mid x \textit{ ist durch } 2 \textit{ teilbar}\}$
$T=\{x\in\mathbb{N} \mid x \textit{ ist durch } 4 \textit{ teilbar}\}$
$S\cap T=T$
$S\cup T=S$
$S\setminus T=\{x \mid x \textit{ ist durch } 2 \textit{ aber nicht durch } 4 \textit{ teilbar}\}=\{2,6,10,10,\ldots\}$
$=\{x\in\mathbb{N} \mid x=4k+2, k\in\mathbb{N}\}$

Bemerkung: Venn Diagramme

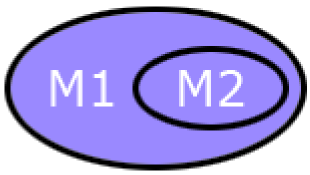
Stellt Mengen als Ovale dar:



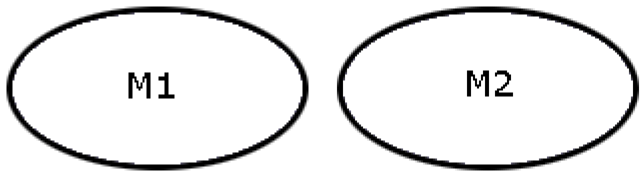
$M_1\cup M_2$



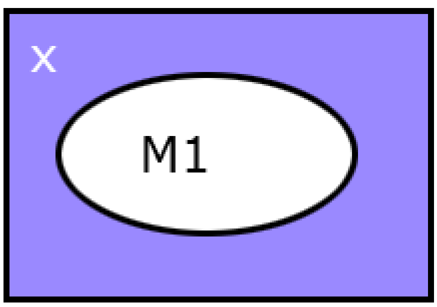
$M_1\cap M_2$



$M_2\subseteq M_1$



$M_1\cup M_2=\emptyset$



$\bar{M}_1$

Definition

S und T seien Mengen.
Die Produktmenge $S \times T$ ist die Menge der geordneten Paare (s,t) mit $s \in S$ und $t \in T$, also:

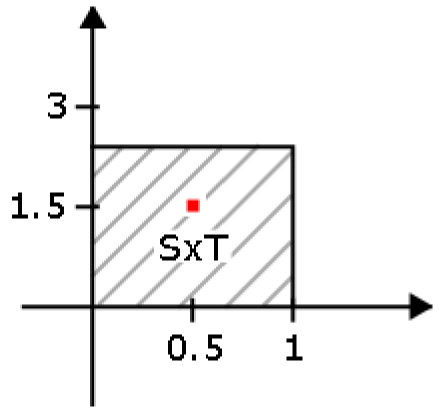
$$S \times T = \{(s,t) \mid s \in S, t \in T\}$$

Beispiel

i. $S=\{1,2,3\}, T=\{x,y,z\}$
$S \times T = \{(1,x),(2,x),(3,x),(1,y),(2,y),(3,y),(1,z),(2,z),(3,z)\}$

ii. $S=\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}, T=\{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 2\}$
$S \times T = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

$z.B. (0.5, 1.5) \in S \times T$



iii. $S=\{1\}, T=\{a,b,c\} \Rightarrow S \times T = \{(1,a),(1,b),(1,c)\}$

1.3 Relationen

1.3.1 Beispiele

Definition

M und N seien Mengen.
Dann heißt jede Teilmenge $R \subseteq M \times N$ eine **Relation** zwischen den Mengen M und N.

Beispiel

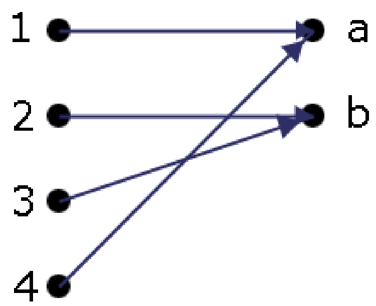
i. $M = \{\text{Alle MI-Studenten vom 1. Semester}\}$
$N = \{\text{Alle Martrikelnummern}\}$
$R = \{(m, n) \mid n \text{ ist die Matrikelnr des Studenten } m\}$

ii. $M = \{1, 2, 3, 4\}, N = \{a, b\}$
$M \times N = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b), (4,a), (4,b)\}$
$R = \{(1,a), (2,b), (3,b), (4,a)\}$

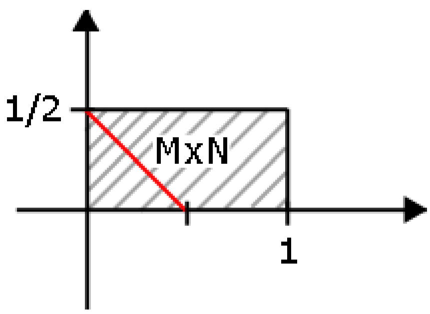
Tabelarische Darstellung von R

R	***a***	***b***
1	x	
2		x
3		x
4	x	

Pfeildiagramm



iii. $M = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 1\}, N = \left\{y \in \mathbb{R} \mid 0 \le y \le \frac{1}{2}\right\}$



$$R = \left\{(x, y) \mid y = -x + \frac{1}{2}, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le \frac{1}{2}\right\}$$

Bemerkung

R Relation zwischen M und N. Falls $(m, n) \in R$, sagt man: " m steht in Relation zu n ". mRn.

1.3.2 Äquivalenzrelationen

Definition

M sei Menge.

- Eine Teilmenge $R \subseteq M \times N$ heißt **Relation in M**.
- Eine Relation R in M heißt **reflexiv**, wenn gilt: $(x, x) \in R$ *für alle* $x, y \in M$.
- Eine Relation R in M heißt **symmetrisch**, wenn gilt:
  $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$ *für alle* $x, y \in M$
- Eine Relation R in M heißt **transitiv**, wenn gilt:
  $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$ *für alle* $x, y, z \in M$
- Eine reflexive, symmetrische und transitive Relation R in M heißt **Äquivalenzrelation** in M .

Beispiel

i. $M = \{Alle\ HdM-Studenten\}$
   $xRy \Leftrightarrow x$ wohnt mit y in einer WG .

R reflexiv?	Ja, denn jeder wohnt mit sich selbst in WG.
R symmetrisch?	Ja, denn "Alise wohnt mit Bob in WG" $\Rightarrow$ "Bob wohnt mit Alise in WG"
R transitiv?	$\left.\begin{array}{l}\text{"Alise wohnt mit Bob in WG"}\\ \text{"Bob wohnt mit Carol in WG"}\end{array}\right\}$ "Alise wohnt mit Carol in WG"

Definition

M sei Menge, R Äquivalenzrelation in M .

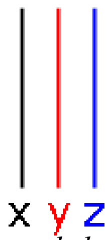
- Dann heißt $[x] = \{y \in M \mid (y, x) \in R\}$ die **Äquivalenzklasse** von x .

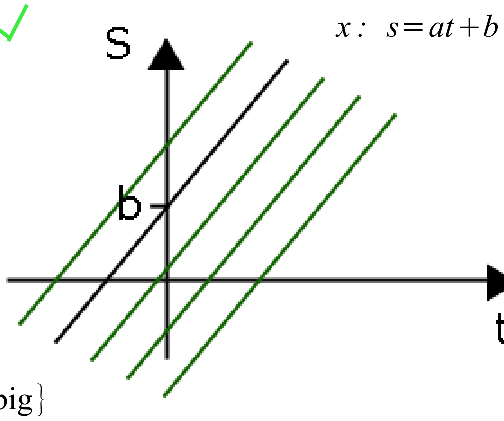
Beispiel

i. $M = \{Alle\ Geraden\ der\ Ebene\}$
   $(x, y) \in R \Leftrightarrow x$ ist zu y parallel

reflexiv:	x parallel zu x ✓
symmetrisch:	x parallel zu y $\Rightarrow$ y parallel zu x ✓
transitiv:	$\left.\begin{array}{l}\text{x parallel zu y}\\ \text{y parallel zu z}\end{array}\right\}$ x parallel zu z ✓

R ist Äquivalenzrelation.





$[x] = \{\text{Menge der Geraden} \mid s = at + l, l \in \mathbb{R} \text{ beliebig}\}$

ii. $M=\mathbb{Z}=\{0,1,-1,2,-2,3,-3,\ldots\}$
$(x,y)\in R \Leftrightarrow (x-y)$ ist durch 5 teilbar.

reflexiv: $(x,x)\in R$, denn $x-x=0$ und 0 durch 5 teilbar.

symmetrisch: $(x,y)\in R \Rightarrow x-y$ ist durch 5 teilbar $\Rightarrow -(x-y)=y-x$ ist durch 5 teilbar $\Rightarrow (y,x)\in R$

transitiv: $(x,y)\in R \Rightarrow x-y$ durch 5 teilbar $\Rightarrow x-y=k\cdot 5$
$(y,z)\in R \Rightarrow y-z$ durch 5 teilbar $\Rightarrow y-z=l\cdot 5 \Rightarrow y=l\cdot 5+z$

$x-(l\cdot 5+z)=5\cdot k$
$x-z=(l+k)\cdot 5$
$\Rightarrow (x,z)\in R$ ✓

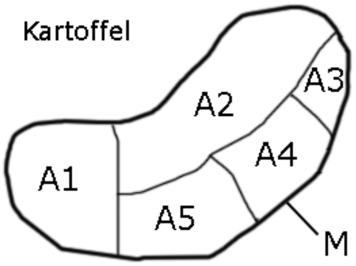
Bilde Äquivalenzklassen:

$[0]=\{0,5,-5,10,-10,\ldots\}=\{x\in\mathbb{Z} \mid x=5\cdot m, m\in\mathbb{Z}\}$
$[1]=\{1,6,-4,11,-9,\ldots\}=\{x\in\mathbb{Z} \mid x=5\cdot m+1, m\in\mathbb{Z}\}$
$[2]=\{2,7,-3,12,-8,\ldots\}=\{x\in\mathbb{Z} \mid x=5\cdot m+2, m\in\mathbb{Z}\}$
$[3]=\{3,8,-2,13,-7,\ldots\}=\{x\in\mathbb{Z} \mid x=5\cdot m+3, m\in\mathbb{Z}\}$
$[4]=\{4,9,-1,14,-6,\ldots\}=\{x\in\mathbb{Z} \mid x=5\cdot m+4, m\in\mathbb{Z}\}$
$[5]=\{0,5,-5,10,-10,\ldots\}=[0]$
$[6]=[1]$
.
.
.
$[13]=[3]$

Definition

- M sei Menge. $A=\{A_i \mid A_i\subseteq M\}$ sei Menge von Teilmenge von M.
  A heißt eine **Partition von M**: $\Leftrightarrow$ Jedes Element von M ist Element eines der A_i und $A_i\cap A_j=\emptyset$ für $i\neq j$.

Beispiel



$A=\{A_1, A_2, \ldots, A_5\}$ *bildet Partition von M.*

Satz

R sei Äquivalenzrelation in M.
$\Rightarrow$ Die Äquivalenzklassen von R bilden eine Partition von M.

Beweis

i. Zeige: Jedes $x \in M$ gehört zu einer der Äquivalenzklassen, denn $x \in [x]$, da reflexiv.

ii. Zeige: $[x] \cap [y] = \emptyset$ wenn $[x] \neq [y]$
Sei also $z \in [x] \wedge [y]$ $\Rightarrow$ $z \in [x] \Rightarrow z$ steht in Relation zu $x \Rightarrow x$ steht in Relation zu z
$z \in [y] \Rightarrow z$ steht in Relation zu $y \Rightarrow x$ steht in Relation zu y
$\Rightarrow x \in [y] \Rightarrow [x] \subseteq [y]$

Analog gilt auch: $[y] \subseteq [x] \Rightarrow [x] = [y]$
Gezeigt: $[x] \cap [y] \neq \emptyset \Rightarrow [x] = [y]$
Dazu äquivalent: $[x] \neq [y] \Rightarrow [x] \cap [y] = \emptyset$ (**Kontraposition**)

1.3.3 Ordnungsrelationen

Definition

M sei Menge. $R \subseteq M \times M$ sei Relation in M.

- R heißt **antisymmetrisch** $\Leftrightarrow$ $\{(x, y) \in R$ und $(y, x) \in R \Rightarrow x = y\}$
- R heißt **Ordnungsrelation**, wenn R reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.
- Eine Ordnungsrelation R heißt **linear** $\Leftrightarrow$ Für alle Paare $(x, y) \in M \times N$ gilt $(x, y) \in R \vee (y, x) \in R$

Beispiel

i. $M =$ "Menge aller Mengen"
$(x, y) \in R \Leftrightarrow x \subseteq y$

R ist reflexiv:	$(x, x) \in R$, d.h. $x \subseteq x$
R ist transitiv:	$\left.\begin{array}{l}(x, y) \in R \Rightarrow x \subseteq y \\ (y, z) \in R \Rightarrow y \subseteq z\end{array}\right\} x \subseteq z \Rightarrow (x, z) \in R$
R ist antisymmetrisch:	$\left.\begin{array}{l}(x, y) \in R \Rightarrow x \subseteq y \\ (y, x) \in R \Rightarrow y \subseteq x\end{array}\right\} x = y$
R ist nicht linear	$x = \{1,2,3\}, y = \{4,5,6\}$ $\Rightarrow x \not\subseteq y, y \not\subseteq x \Rightarrow (x, y) \notin R \; und \; (y, x) \notin R$

R Ordnungsrelation: R reflexiv, antisymmetrisch, transitiv

R Ordnungsrelation heißt linear $\Leftrightarrow$ $\forall x, y$ gilt: $(x, y) \in R \vee (y, x) \in R$

Beispiel

$M=\mathbb{N}$
$(x,y)\in R \Leftrightarrow x\leq y$

R ist lineare Ordnungsrelation.

R ist reflexiv: $(x,x)\in R$, denn $x\subseteq x$

R ist antisymmetrisch: $\left.\begin{aligned}(x,y)\in R &\Rightarrow x\subseteq y\\ (y,x)\in R &\Rightarrow y\subseteq x\end{aligned}\right\}\ x=y$

R ist transitiv: $\left.\begin{aligned}(x,y)\in R &\Rightarrow x\subseteq y\\ (y,z)\in R &\Rightarrow y\subseteq z\end{aligned}\right\}\ x\subseteq z \Rightarrow (x,z)\in R$

R ist linear: Sei $x\in\mathbb{N}$ und $y\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $x\subseteq y$ oder $y\subseteq x$
$\Rightarrow$ $(x,y)\in R \vee (y,x)\in R$

$0\leq 1\leq 2\leq 3\leq 4\leq 5\ldots$

1.4 Abbildungen

Definition

M und N seien Mengen.

Eine Relation f zwischen M und N heißt eine **Abbildung** (oder **Funktion**) aus M in N, in Zeichen $f:M\rightarrow N$, falls gilt: $(x,y)\in f$ und $(x,y')\in f \Rightarrow y=y'$

und: Für alle $x\in M$ existiert ein $y\in N$ mit $(x,y')\in f$
y heißt auch das **Bild** von x, in Zeichen $y=f(x)$. x heißt **Urbild** von y.
M heißt Definitionsbereich, N der Wertevorrat.

Beispiel

$M=\{1,2,3,4,5,6\}, N=\{a,b,c,d,e\}$

Betrachte Relation zwischen M und N.

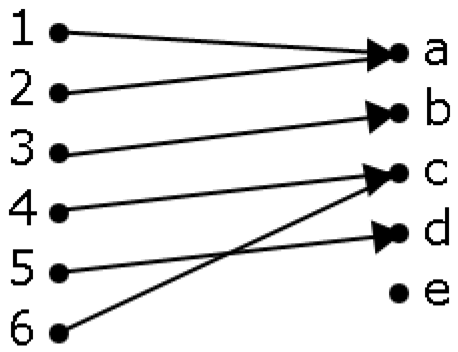
	a	*b*	*c*	*d*	*e*
1	x				
2	x				
3		x			
4			x		
5				x	
6			x		

f ist Abbildung zwischen M und N
· in jeder Zeile **genau ein** x

Beschreibe f durch Wertetabelle:

$x \in M$	1	2	3	4	5	6
$y \in N$	a	a	b	c	d	c

Pfeildiagramm:

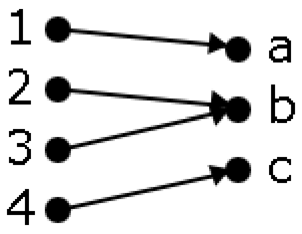


Definition

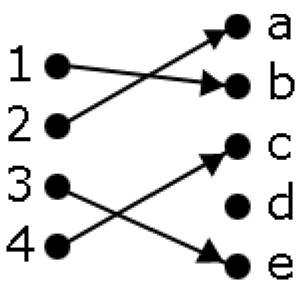
$f: M \to N$ sei Abbildung.

- f heißt **surjektiv**, wenn es zu jedem $y \in N$ ein $x \in M$ gibt mit $y = f(x)$
- f heißt **injektiv**, wenn gilt: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- f heißt **bijektiv**, falls f surjektiv und injektiv ist.

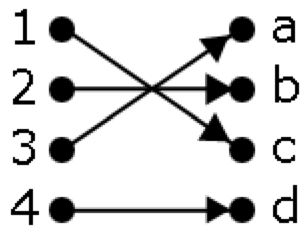
Beispiel



surjektiv, nicht injektiv



injektiv, nicht surjektiv



bijektiv

Satz

M und N seien Mengen mit endlich vielen Elementen. Es existiert eine bijektive Abbildung $f: M \to N \Leftrightarrow M$ und N enthalten gleich viele Elemente.

Definition

- M sei Menge. Die Anzahl der Elemente in M heißt **Mächtigkeit** $|M|$ von M genannt.
- M und N seien unendliche Mengen. M und N heißen **gleichmächtig**: $\Leftrightarrow$ Es existiert eine bijektive Abbildung $f: M \to N$.

Beispiel

$M = N$, $N = \{0, 2, 4, 6, 8, ...\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2 \cdot k , k \in \mathbb{N}\}$
$f: M \to N$ mit $y = f(x) = 2 \cdot x$
f ist bijektiv, denn:

a) surjektiv: Sei $y = 2\mathrm{k} \in N \Rightarrow x = k$ ist Urbild mit $y = f(x)$

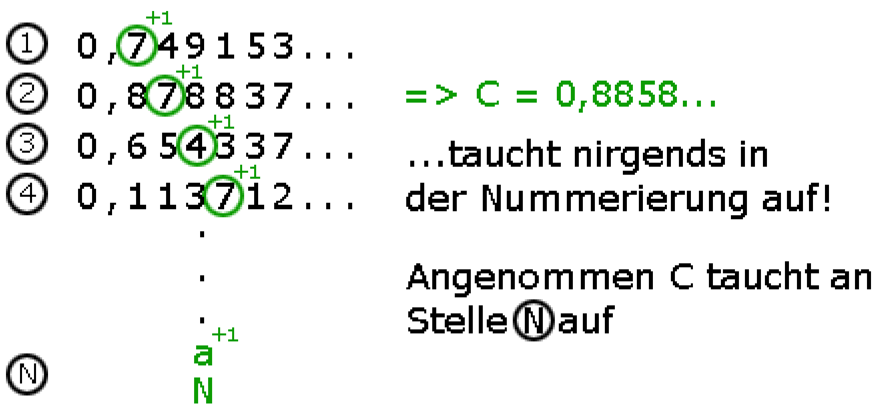
b) injektiv: Sei $y_1 = 2 \cdot x_1 = y_2 = 2 \cdot x_2 = 2 \cdot x_1 = 2 \cdot x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

Beispiel

$M = \mathbb{N}, N = \mathbb{R}$

Zeige: Die reellen Zahlen können nicht nummeriert werden.

Annahme: Es gibt Nummerierung des Intervalls $0 < x < 1$ $(x \in \mathbb{R})$

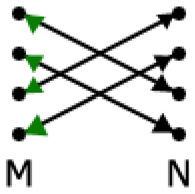


$\Rightarrow$ C unterscheidet sich von Zahl an Stelle N in der N.ten Nachkommastelle.

$\Rightarrow$ C taucht nirgends auf $\Rightarrow$ Es kann keine bijektive Abbildung $f: M \to N$ geben.

Relation f zwischen M und N $\Rightarrow$ Jedes $x \in M$ hat **eindeutigen** Partner $y \in N \Rightarrow f$ heißt **Funktion** $f: M \rightarrow N$.

f bijektive Abb.:



Definition

$f: M \rightarrow N$ sei bijektive Abbildung.

Dann existiert zu jedem $y \in N$ genau ein $x \in M$ mit $y = f(x)$. Die Abbildung die jedem y ihr Urbild $x \in M$ zuordnet heißt Umkehrabbildung: $f^{-1}: N \rightarrow M$

Beispiel

$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, x \rightarrow y = f(x) = x^2$

f surjektiv? Nein, denn zu $y = 3$ existiert kein $x \in \mathbb{Z}$ mit $x^2 = 3$

f injektiv? Nein, denn $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$ liefern das gleiche Bild $y = 4$

Betrachte jetzt $g: \mathbb{N} \rightarrow \text{"Quadratzahlen"} = \{y \in \mathbb{N} \mid y = k^2, k \in \mathbb{N}\}$

$x \rightarrow g(x) = x^2$

g surjektiv, denn: Zu $y = k^2$ gehört $x = k$ als Urbild.

g injektiv, denn: $y_1 = y_2 \Rightarrow k_1^2 = k_2^2 \Rightarrow k_1 = k_2$ (da $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$)

$\Rightarrow g$ bijektiv!

$\Rightarrow$ Es existiert Umkehrabbildung $g^{-1}: \text{Quadratzahlen} \Rightarrow \mathbb{N}, y = k^2 \rightarrow k \in \mathbb{N}$

Definition

$f: M \rightarrow N$ und $g: N \rightarrow X$ seien Abbildungen.

Die Abbildung $gof: M \rightarrow X$ mit $(gof)_{(x)} = g(f(x))$ für $x \in M$ heißt **Komposition** von f und g .

Beispiel

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow f(x) = 2x - 1$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow g(x) = x^3$

Bilde $gof: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (gof)_{(x)} = g(f(x)) = g(2x-1) = (2x-1)^3$

Satz

$f: M \to N$, $g: N \to X$, $h: X \to Y$ seien Abbildungen.

i. Für die Verknüpfung von f, g und h gilt: $ho(gof) = (hog)of$

ii. Sind f und g beide bijektiv, so ist auch (gof) bijektiv und es gilt
$(gof)^{-1} = f^{-1} og^{-1}$

Beispiel

f und g wie oben sind bijektiv.

$y = f(x) = 2x - 1 \;\Rightarrow\; x = \frac{y+1}{2} \;\Rightarrow\; f^{-1} \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, y \to \frac{y+1}{2}$

$y = g(x) = x^3 \;\Rightarrow\; x = \sqrt[3]{y} \;\Rightarrow\; g^{-1} \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, y \to \sqrt[3]{y}$

$\Rightarrow (f^{-1} og^{-1})_{(y)} = f^{-1}(g^{-1}(y)) = f^{-1}(\sqrt[3]{y}) = \frac{\sqrt[3]{y}+1}{2}$

$(gof)_{(x)} = (2x-1)^3 = y = 2x - 1 = \sqrt[3]{y} \;\Rightarrow\; x = \frac{\sqrt[3]{y}+1}{2}$

$\Rightarrow \; (gof)^{-1}_{(y)} = \frac{\sqrt[3]{y}+1}{2}$

2. Gruppen und Körper

2.1 Gruppen

2.1.1 Operationen

Definition

M sei Menge.

- Eine Abbildung $f: M \times N \rightarrow M$ heißt Operation auf M. Wir schreiben statt $f(a, b)$ häufig $a * b$. Das Symbol $*$ heißt **(binärer) Operator**, a und b heißen **Operanden**.
- Gilt für alle $a, b \in M: a * b = b * a$ heißt der Operator **kommutativ**.
- Gilt für alle $a, b, c \in M: (a * b) * c = a * (b * c)$ heißt der Operator **assoziativ**.

Beispiel

i. $M = \mathbb{N}, f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, (a, b) \rightarrow a + b$
$+$ ist assoziativer und kommutativer Operator auf $\mathbb{N}$.

ii. $M = \mathbb{Z}, f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (a, b) \rightarrow a - b$
$-$ ist nicht kommutativ: $3 - 2 \neq 2 - 3$
$-$ ist nicht assoziativ: $3 - (2 - 1) \neq (3 - 2) - 1$

2.1.2 Gruppenaxiome

Definition

M sei Menge. $*$ eine Operation auf M.

Das Paar $(M, *)$ heißt **Gruppe**, wenn gilt:

(1) $*$ ist assoziativ

(2) Es gibt ein $e \in M$, so dass für alle $x \in M$ gilt: $x * e = e * x = x$
e heißt **neutrales Element**.

(3) Zu jedem $x \in M$ gibt es ein $x^{-1} \in M$ mit: $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$
x^{-1} heißt das zu x **inverses Element**.

Beispiel

i. $(\mathbb{N}_0, +)$ ist **keine** Gruppe.
$+$ ist Operation ✓ $+$ ist assoziativ ✓ $e = 0$ ist neutrales Element bzgl. $+$
Finde zu 3 inverses Element 3^{-1} mit $3 + 3^{-1} = 0$ ↯
$\Rightarrow$ es existiert kein inverses Element zu 3

ii. $(\mathbb{Z},+)$ bildet eine Gruppe mit $e=0$ und $a^{-1}=(-a)$ für $a\in\mathbb{Z}$.
$(\mathbb{Z},\cdot)$ ist **keine** Gruppe: $\cdot$ ist assoziative Operation auf $\mathbb{Z}$ mit $e=1$, aber zu $x=2$ existiert kein x^{-1} mit $x\cdot x^{-1}=1$
$(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$ ist Gruppe bezüglich $\cdot$ mit $e=1$. Zu $x\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ ist $x^{-1}=\frac{1}{x}$ inverses Element.
$(\mathbb{Q},+)$ ist Gruppe mit $e=0$.

Bemerkung

$(M,*)$ sei Gruppe.

Ist $*$ kommutative Operation, so heißt $(M,*)$ **abelsche Gruppe**.

Satz

i. In M existiert genau ein neutrales Element e.

ii. Für alle $x\in M$ existiert genau ein inverses Element x^{-1}.

iii. Für alle $a,b\in M$ besitzen die Gleichungen $a*x=b$ und $y*a=b$ eindeutige Lösungen $x,y\in M$.

iv. Kürzungsregel: $a*c=b*c \Rightarrow a=b$ für alle $a,b,c\in M$.

v. Für alle $a\in M$ ist $(a^{-1})^{-1}=a$.

vi. $(a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}$ für alle $a,b\in M$.

Beweis

i. e_1 und e_2 seien zwei neutrale Elemente.

$$\left.\begin{array}{ll}\Rightarrow\ x*e_2=x & \forall x\in M\Rightarrow e_1*e_2=e_1\\ \text{Ausserdem gilt: } e_1*x=x & \forall x\in M\Rightarrow e_1*e_2=e_2\end{array}\right\}\ e_1=e_2$$

ii. Zu $x\in M$ seien x^{-1} und $(x^{-1})'$ invers:

$$\Rightarrow \boldsymbol{(x^{-1})'}=e*(x^{-1})'=(x^{-1}*x)*(x^{-1})'=x^{-1}*(x*(x^{-1})')=x^{-1}*e=\boldsymbol{x^{-1}}$$

iii. Setze $x=a^{-1}*b$. Einsetzen:

$$\begin{aligned}&a*(a^{-1}*b)=b\\&(a*a^{-1})*b=b\\&e*b=b\\&b=b\end{aligned}$$

Setze analog $y=b*a^{-1}$

iv. Einsetzen $a=b \Rightarrow b*c=b*c$.

v. $(a^{-1})^{-1}=a=a*e=a*(a^{-1}*(a^{-1})^{-1})=(a*a^{-1})*(a^{-1})^{-1}=e*(a^{-1})^{-1}=(a^{-1})^{-1}$

vi. $(a*b)*(b^{-1}*a^{-1})=a*(b*(b^{-1})*a^{-1})=a*((b*b^{-1})*a^{-1})=a*(e*a^{-1})=a*a^{-1}=e$

2.2 Körper

Definition

Ein Tupel $(K,+,\cdot)$ bestehend aus einer Menge K und zwei Operationen $+,\cdot$ heißt ein **Körper**, wenn gilt:

- $(K,+)$ ist abelsche Gruppe. Wir bezeichnen das neutrale Element bzgl. $+$ mit 0.
- $(K\setminus\{0\},\cdot)$ ist Gruppe. Wir bezeichnen das neutrale Element bzgl. $\cdot$ mit 1.
- $0\cdot a=0$ für alle $a\in K$.
- Distributivgesetz $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

Beispiel

i. $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ ist Körper.

ii. $(\mathbb{R},+,\cdot)$ ist Körper.

iii. $(\mathbb{C},+,\cdot)$ ist Körper (siehe später).

iv. $K=\{0,1\}$. Definiere $+$ und $\cdot$ auf K.

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

1) $(K,+)$ ist abelsche Gruppe: $+$ ist assoziative Operation mit $e=0$
Inverses Element: $0^{-1}=0,\ 1^{-1}=1$

2) $(K\setminus\{0\},\cdot)$ ist Gruppe: $K\setminus\{0\}=\{1\},\ e=1,\ 1^{-1}=1$

3) $0\cdot a=0$ für alle $a\in\{0,1\}$ ✓ nach Multiplikations Tabelle.

4) Zeige: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad \forall a,b,c\in K$
1. Fall: $a=0=0\cdot(b+c)=0$ nach 3)
$=0\cdot b+0\cdot c=0+0=0$ ✓
2. Fall: $a=1:\ 1\cdot(b+c)=b+c$
$=1\cdot b+1\cdot c=b+c$ ✓

Bemerkung

Bezeichne $K=\{0,1\}$ auch als $GF(2)$ (Galois-Field)
Allgemein $K=\{0,1,\ldots,p-1\}=GF(p)$ (p eine Primzahl)

Man kann zeigen: Bei passender Multiplikation und Addition bilden alle $GF(p)$ Körper.

Endliche Körper

2.3 Komplexe Zahlen

2.3.1 Motivation

Lösung von: $x^2+1=0$. Es gibt keine reelle Zahl mit $x^2=-1$.

Deshalb: Definiere i als Lösung von $x^2=-1$.
Um rechnen zu können, betrachte Zahlen der Form $a+bi$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$.

Definition

Die Menge $\mathbb{C}$ der **Komplexen Zahlen** hat die Form
$\mathbb{C}=\{z=a+bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i \text{ Lösung von } x^2+1=0\}$.
a heißt **Realteil** von z, b heißt **Imaginärteil** von z .
Die zu $z=a+bi$ **konjugiert komplexe Zahl** ist $\bar{z}=a-bi$.

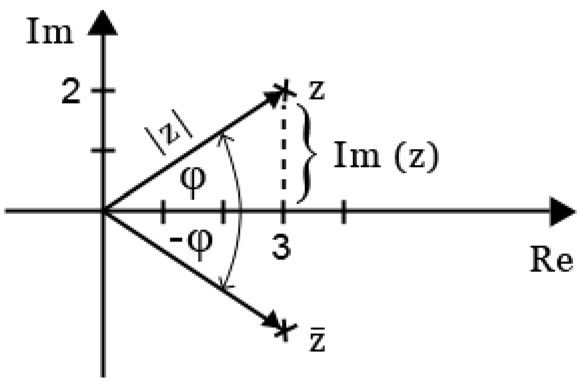
2.3.2 Graphische Darstellung

Identifiziere $z=a+bi$ mit dem Zahlenpaar $(a, b) \Rightarrow$ Stelle z dar als Punkt in zweidimensionaler Ebene.

x-Achse $\Leftrightarrow$ *Realteil* , y-Achse $\Leftrightarrow$ *Imaginärteil*

$z=3+2\mathrm{i}, \quad \bar{z}=3-2\mathrm{i}$
$|z|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

Gauß'sche Zahlenebene



Definition

Für $z \in \mathbb{C}$ setze $|z|=\sqrt{\mathrm{Re}^2(z)+\mathrm{Im}^z(2)}$

Der Winkel φ , den der Pfeil zum Punkt z in der Gauß'schen Zahlenebene mit der positiven x-Achse einschliesst, heißt **Argument** von $z\,(arg(z))$. Es gilt

$$-\pi < arg(z) \leq \pi \qquad \sin(arg(z))=\frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}, \quad \cos(arg(z))=\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}$$

Bemerkung

$$\mathrm{Im}(z)=\sin(arg(z))\cdot|z|, \quad \mathrm{Re}(z)=\cos(arg(z))\cdot|z|$$
$$\Rightarrow \quad z=|z|\cdot\cos(arg(z))+i\cdot|z|\cdot\sin(arg(z))$$
$$=|z|(\cos(arg(z)))+i\cdot\sin(arg(z))$$

Trigonometrische Darstellung von z

$|z|$ und (z) heißen auch **Polarkoordinaten**.

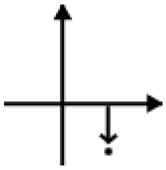
Beispiel

i. $z=5+5i \quad \Rightarrow |z|=\sqrt{50}=5\cdot\sqrt{2}; \quad \sin(\varphi)=\frac{5}{5\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{4}$

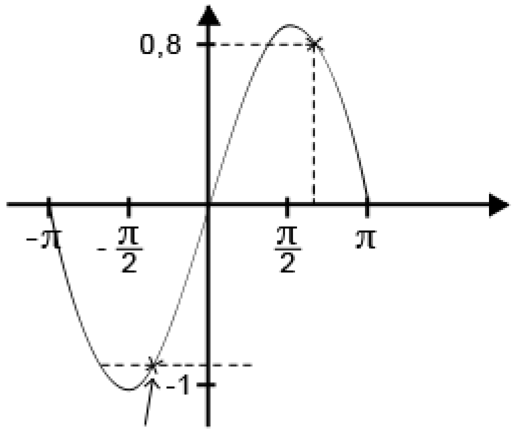
ii. $z=1-4i \quad \Rightarrow |z|=\sqrt{17}$

$\sin(\varphi)=\frac{-4}{\sqrt{17}}=-0{,}9701$

$\Rightarrow \varphi=-1{,}33$

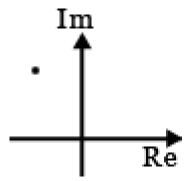


$-\frac{\pi}{2}<\varphi<0$



iii. $z=-3+4i, \quad |z|=\sqrt{25}=5$

$\sin\varphi=\frac{4}{5}=0{,}8$



$\frac{\pi}{2}<arg(z)<\pi$

Taschenrechner: $\varphi=0{,}927$ Benutze: $\pi-0{,}927\approx 2{,}21=arg(z)$

2.3.3 Der Körper der Komplexen Zahlen

Addiere Komplexe Zahlen:

$$\left.\begin{array}{l} z_1=x_1+iy_1 \\ z_2=x_2+iy_2 \end{array}\right\} \Rightarrow z_1+z_2=\underbrace{x_1+x_2}_{\mathrm{Re}(z_1+z_2)}+i\underbrace{(y_1+y_2)}_{\mathrm{Im}(z_1+z_2)}$$

Multipliziere Komplexe Zahlen:

$$\left.\begin{array}{l} z_1=x_1+iy_1 \\ z_2=x_2+iy_2 \end{array}\right\} \Rightarrow z_1\cdot z_2=x_1\cdot x_2+iy_1\cdot y_2$$

geht nicht

Multipliziere $z_1=3, \quad z_2=-5i \quad \Rightarrow \quad z_1\cdot z_2=3\cdot 0+i\cdot 0\cdot(-5)=0$

Alternative Multiplikation

Multiplikation für Komplexe Zahlen:

$$\left.\begin{array}{l} z_1=x_1+iy_1 \\ z_2=x_2+iy_2 \end{array}\right\} \begin{aligned} z_1\cdot z_2&=(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2) \\ &=x_1x_2+ix_1y_2+iy_1x_2-y_1y_2 \\ &=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2) \end{aligned}$$

$(K \setminus \{0\},\cdot)$ ist Gruppe!

Definition

Auf der Menge $\mathbb{C}$ der Komplexen Zahlen werden Addition $+$ und Multiplikation $\cdot$ wie folgt definitert:

Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ setze
$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(z_1+z_2) &= \mathrm{Re}(z_1)+\mathrm{Re}(z_2)\\
\mathrm{Im}(z_1+z_2) &= \mathrm{Im}(z_1)+\mathrm{Im}(z_2)\\
\mathrm{Re}(z_1\cdot z_2) &= \mathrm{Re}(z_1)\cdot\mathrm{Re}(z_2)-\mathrm{Im}(z_1)\cdot\mathrm{Im}(z_2)\\
\mathrm{Im}(z_1\cdot z_2) &= \mathrm{Re}(z_1)\cdot\mathrm{Im}(z_2)+\mathrm{Re}(z_2)\cdot\mathrm{Im}(z_1)
\end{aligned}$$

Satz

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist Körper!

Beweis

i. $(\mathbb{C}, +)$ ist abelsche Gruppe mit neutralem Element $0=0+i0$

ii. $(\mathbb{C}\setminus\{0\}, \cdot)$ ist Gruppe: $\cdot$ ist Operation $\checkmark$ $\cdot$ ist assoziativ $\checkmark$
Neutrales Element ist $1=1+0\cdot i$, denn:
Sei $z=x+iy$
$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ 1\cdot z &= (1+0\mathrm{i})(x+iy)\\
&= 1\cdot x+1\cdot iy+0\cdot ix+0\cdot i^2 y\\
&= x+iy=z \checkmark
\end{aligned}$$
Suche jetzt inverses Element z^{-1} zu $z\neq 0$
"Schmierüberlegung": $z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}=\frac{x-iy}{x^2-\cancel{iyx}+\cancel{iyx}-i^2y^2}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$
$$\Rightarrow\ \mathrm{Re}(z^{-1})=\frac{x}{x^2+y^2},\quad \mathrm{Im}(z^{-1})=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

iii. $0\cdot z=(0+0\mathrm{i})(x+iy)=0\cdot x+iy0+ix0+i^2 0\mathrm{y}=0+i0=0$ $\checkmark$

iv. Distributivgesetz:
Zeige $z_1\cdot(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$ [siehe Übung!]

Beispiel

i. $z_1=3+4\mathrm{i},\quad z_2=-2-2\mathrm{i}$

ii. $z_1+z_2=(3-2)+i(4-2)=1+2\mathrm{i}$

iii. $z_1\cdot z_2=(3+4\mathrm{i})(-2-2\mathrm{i})=-6-6\mathrm{i}-8\mathrm{i}+8=2-14\mathrm{i}$

iv. $z_1^{-1}=\frac{1}{3+4\mathrm{i}}=\frac{3-4\mathrm{i}}{9+16}=\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i$
$$\frac{z_2}{z_1}=z_2\cdot z_1^{-1}=(-2-2\mathrm{i})\left(\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i\right)=\frac{-6}{25}-\frac{6}{25}i+\frac{8}{25}i-\frac{8}{25}=\frac{-14}{25}+\frac{2}{25}i$$

3. Lineare Gleichungssysteme

$$4x+12=34 \quad | -12$$
$$4x=22 \quad | \cdot\frac{1}{4}$$
$$x=\frac{11}{2}$$

Allgemein: Suche Lösung immer in **Körpern**!

3.1 Beispiele

3.1.1 Beispiel 1

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+2x_3=3 &\Rightarrow x_1+1-2=3 \Rightarrow x_1=4 \\ 8x_2+x_3=3 &\Rightarrow 8x_2-1=3 \Rightarrow x_2=\frac{1}{2} \\ -4x_3=4 &\Rightarrow x_3=-1 \end{aligned}$$

3.1.2 Beispiel 2

$$\begin{aligned} x_1+x_2=0 &\Rightarrow 0 \checkmark \\ -x_1-x_2=0 &\Rightarrow x_2=-x_1 \end{aligned}$$

Lösungen sind $\{(x_1, x_2) \mid x_1=\lambda, x_2=-\lambda, \lambda\in K \text{ beliebig}\}$

3.1.3 Beispiel 3

$$\begin{aligned} x_1+x_2=3 &\Rightarrow x_1+1-x_1=3 \Rightarrow 1=3 \lightning \\ 2x_1+2x_2=2 &\Rightarrow x_2=1-x_1 \end{aligned}$$

Keine Lösung!

3.2 Das Gauß – Verfahren

Definition

Ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n-Unbekannten $x_1, x_2 \dots x_m$ hat die Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n&=b_m \end{aligned} \quad \text{—>} \quad \mathit{Abb.}\ 1$$

wobei a_{ij} für $1\le i\le m$, $1\le j\le n$ Elemente eines Körpers K sind (und auch die b_i für $1\le i\le m$).
Die a_{ij} und b_i heißen die **Koeffizienten** des Systems.

Sind alle $b_i=0$ heißt das System **homogen**, sonst **inhomogen**.
Ein n-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mit $x_i \in K$ heißt Lösung von $Abb.\ 1$, falls die x_i alle Gleichungen erfüllen.

Satz

Die Menge der Lösungen von $Abb.\ 1$ ändert sich nicht, falls:

- Gleichungen vertauscht werden
- Gleichungen mit Konstanten $\neq 0$ multipliziert werden
- Eine Gleichung zu einer anderen addiert wird

"elementare Umformungen"

Satz

Gauß – Verfahren

Ein lineares Gleichungssystem der Form $Abb.\ 1$ lässt sich durch elementare Umformungen auf Dreiecksform bringen, falls $m=n$.

Beweis

i. Multipliziere 1. Gleichung mit a_{11}^{-1}
(IF $(a_{j1}==0)$ THEN
{
 Suche a_{j1} mit $a_{1i}!=0$
 Vertausche Gleichung 1 mit Gleichung i
})

ii. Für alle Gleichungen mit $a_{j1}\neq 0$ tue folgendes:
{
- Multipliziere 1. Gleichung mit $(-a_{i1})$
-Addiere Gleichung 1 auf Gleichung i
}

Gleichung hat jetzt das Aussehen:

$$1\cdot x_1+\tilde{a}_{12}x_2+\ldots+\tilde{a}_{1n}x_n=\tilde{b}_1$$

$$\boxed{\begin{matrix} a_{22}x_2+\ldots+\tilde{a}_{2n}x_n=\tilde{b}_2 \\ \vdots \\ a_{2n}x_n+\ldots+\tilde{a}_{nn}x_n=\tilde{b}_n \end{matrix}}$$

blau

($n-1$ Gleichungen, $n-1$ Variablen)

$\Rightarrow$ Fahre fort mit blauem System und $\tilde{a}_{22}$ als Startelement!
Nach $n-1$ Schritten:

$$\begin{aligned} 1x_1+\tilde{a}_{12}x_2+\ldots+\tilde{a}_{1n}x_n&=\tilde{b}_1 \\ \tilde{a}_{22}x_2+\ldots+\tilde{a}_{2n}x_n&=\tilde{b}_2 \\ \tilde{a}_{33}x_3+\tilde{a}_{3n}x_n&=\tilde{b}_3 \\ \ddots\ \tilde{a}_{nn}x_n&=\tilde{b}_n \end{aligned}$$

Dreiecksform!
mit $\tilde{a}_{ij}\in\{0,1\}$ für $i\geq 2$

Bemerkung

i. Falls alle diagonalen Elemente $=1$ $\Rightarrow$ es existiert eindeutige Lösung.

ii. Falls $\tilde{a}_{ii}=0$ und $\tilde{b}_i \neq 0$ $\Rightarrow$ keine Lösung!
Falls $\tilde{a}_{ii}=0$ und $\tilde{b}_i=0$ $\Rightarrow$ mehrere Lösungen!

iii. Falls $m>n$:

$$\left.\begin{matrix} 1x_1+\ldots+\tilde{a}_{1n}=\tilde{b}_1 \\ \ddots \quad \tilde{a}_{nn}x_n=\tilde{b}_n \\ a_{n+1,n}x_n=\tilde{b}_{n+1} \\ \vdots \\ \tilde{a}_{mn}x_n=\tilde{b}_m \end{matrix}\right\}$$

$\Rightarrow$ Falls alle Gleichungen gleich Aussehen $\Rightarrow$ siehe "Falls m = n", sonst: **keine** Lösung!

iv. Falls $n>m$:

$$\begin{matrix} 1x_1+\tilde{a}_{12}x_2+\ldots+\tilde{a}_{1n}x_n=\tilde{b}_1 \\ \tilde{a}_{22}x_2+\ldots+\tilde{a}_{2n}x_n=\tilde{b}_2 \\ \ddots \quad \tilde{a}_{mm}x_m+\ldots+\tilde{a}_{mn}x_n=\tilde{b}_n \end{matrix}$$

Falls alle $\tilde{a}_{ii}=1$ $\Rightarrow$ mehrere Lösungen, sonst: betrachte $\tilde{b}_i$.

Beispiel

i.

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+2x_3&=3 \quad |\cdot(-1) \quad |\cdot(-2) \\ x_1+4x_2+3x_3&=6 \quad + \\ 2x_1-2x_2-3x_3&=1 \quad + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+2x_3&=3 \\ 2x_2+x_3&=3 \quad |\cdot\frac{1}{2} \\ -6x_2-7x_3&=-5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+2x_3&=3 \\ x_2+\frac{1}{2}x_3&=\frac{3}{2} \quad |\cdot 6 \\ -6x_2-7x_3&=-5 \quad + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+2x_3&=3 \Rightarrow x_1=1 \\ x_2+\frac{1}{2}x_3&=\frac{3}{2} \Rightarrow x_2=2 \\ -4x_3&=4 \Rightarrow x_3=-1 \end{aligned}$$

ii.
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+2x_3&=3 \quad \mid\cdot 3 \quad \mid\cdot(-2)\\ -3x_1-6x_2-5x_3&=-8\\ 2x_1+4x_2+4x_3&=6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+2x_3&=3\\ 0x_2+x_3&=1\\ 0x_2+0x_3&=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+2x_3=3 &\Rightarrow x_1=1-2\lambda\\ 0x_2+0x_3=0 &\Rightarrow x_2=\lambda\\ 1x_3=1 &\Rightarrow x_3=1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Lösungsmenge: $L=\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_3=1, x_2 \text{ beliebig } \in K, x_1=1-2x_2\}$

iii.
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+2x_3&=3 \quad \mid\cdot(-1) \quad \mid\cdot(-2)\\ x_1+2x_2+4x_3&=1\\ 2x_1+4x_2+2x_3&=2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+2x_3&=3\\ 0x_1+0x_2+2x_3&=-2 \Rightarrow 0x_2+4=-2 \Rightarrow 0x_2=-6 \ ⚡\\ 0x_1+0x_2+(-2x_3)&=-4 \Rightarrow x_3=2 \end{aligned}$$

Keine Lösung

3.3 Matrixdarstellung

3.3.1 Matrizen

Defintion

Eine $(m\times n)$ Matrix A über einem Körper K ist ein rechteckiges Schema mit m Zeilen und n Spalten:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a_{ij}\in K$$

Bemerkung

Beschreibe lineares Gleichungsystem vollständig durch die **erweiterte Koeffizientenmatrix**

$$C=\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1\\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Elementare Umformungen:

- Gleichungen vertauschen $\Leftrightarrow$ Zeilen in Matrix vertauschen
- Gleichungen mit Faktor multiplizieren $\Leftrightarrow$ Zeile mit Fatkor multiplizieren
- Gleichungen addieren $\Leftrightarrow$ Zeilen addieren

Dreiecksform für Gleichungssystem $\Leftrightarrow$ Matrix hat **obere Dreiecksgestalt**:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & a_{22} & \dots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Definiere Rechenoperationen für Matrizen:

Definition

- Sind A und B zwei $(m\times n)$ Matrizen, so ist ihre Summe $A+B$ gegeben durch $(A+B)_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$
- Ist A eine $(m\times p)$ Matrix und B eine $(p\times n)$ Matrix, so ist ihr Produkt $A\cdot B$ gegeben durch $(A\cdot B)_{ij}=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}(1\leq i\leq m,\ \ 1\leq j\leq n)$
  $(A\cdot B \text{ ist } (m\times n) \text{ Matrix})$

Beispiel

i. $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A+B=\begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 12+6+1 & 4\cdot 1+3\cdot(-1)+1\cdot 1 & 4\cdot 0+3\cdot 0+1\cdot 1 \\ (-1)\cdot 3+0\cdot 2+1\cdot 1 & (-1)\cdot 1+0\cdot(-1)+1\cdot 1 & (-1)\cdot 0+0\cdot 0+1\cdot 1 \\ 2\cdot 3+1\cdot 2+2\cdot 1 & 2\cdot 1+1\cdot(-1)+2\cdot 1 & 2\cdot 0+1\cdot 0+2\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 19 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 10 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ii. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 2 & -12 & 5 \end{pmatrix}$$

Bemerkung

Fasse $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ als $(n\times 1)$ (bzw. $(m\times 1)$) Matrix auf!

A sei $(m\times n)$ Matrix $\Rightarrow$ Produkt $A\cdot X$ ist bildbar.
A ist $(m\times 1)$ Matrix.

$$(A\cdot X)_1=\sum_{k=1}^{n} a_{1\mathrm{k}}\cdot x_k=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1\mathrm{n}}x_n \quad =b_1$$

$$(A\cdot X)_2=\sum_{k=1}^{n} a_{2\mathrm{k}}\cdot x_k=a_{21}x_2+a_{22}x_2+\ldots+a_{2\mathrm{n}}x_n \quad =b_2$$

$$\vdots$$

$$(A\cdot X)_m=\sum_{k=1}^{n} a_{mk}\cdot x_k=a_{m1}x_2+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n \quad =b_m$$

A sei Koeffizientenmatrix eines LGS.
$\Rightarrow$ Schreibe LGS in der Form $\boxed{A\cdot X=B}$
$\Rightarrow$ $X=A^{-1}\cdot B$!?

Fragen: Wann existiert A^{-1} ? Wie bestimmt man A^{-1} ?

Bemerkung

Aussehen der Einheitsmatrix E .

A sei $(m\times n)$ Matrix $\rightarrow$ $\underset{(m\times n)}{A}\cdot\underset{(n\times n)}{E}=\underset{(m\times n)}{A}$

Bilde jetzt $\underset{(n\times n)}{E}\cdot\underset{(m\times n)}{A}=A$

Satz

Eine $(m\times n)$ Matrix kann nur dann eine inverse Matrix besitzen, wenn $m=n$.

Satz

Die $(n\times n)$-Matrix $E=\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ ist neutral bzgl. Matrixmultiplikation mit $(n\times n)$ Matrizen.

Beweis

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ sei $(n\times n)$ Matrix. Zeige: $A\cdot E=A$

$$(A\cdot E)_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}e_{kj}=a_{ij}e_{jj}=a_{ij}$$

$a_{ik}e_{kj}=a_{ij}e_{jj}$
0 für $k\neq j$
1 für $k=j$

3.3.2 Inverse Matrizen und Determinanten

Im Folgenden betrachte nur noch $(n\times n)$ Matrizen.

Beispiel

$n=2$

$a_{11}x_1+a_{12}x_2=\ b_1 \quad |\cdot a_{11}^{-1}$
$a_{21}x_1+a_{22}x_2=\ b_2$

Existieren eindeutige Lösungen $\Leftrightarrow A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ist invertierbar.

$x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2=\frac{b_1}{a_{11}} \quad |\cdot(-a_{21})$
$a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2$

$x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2=\frac{b_1}{a_{11}}$
$x_2\left(a_{22}-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}\right)=b_2-\frac{a_{21}b_1}{a_{11}}$

Ist $a_{22}-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}=\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}}\neq 0$
So ist System eindeutig lösbar.
$\Leftrightarrow \boxed{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\neq 0$

Definition

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ sei $(n\times n)$ Matrix.

- Für $n=2$ heißt $det\ A=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ **Determinante** von A .
- Für $n\geqslant 3$ heißt $det\ A=a_{11}det\ A_{11}-a_{12}det\ A_{12}+\dots-\dots+(-1)^{1+n}a_{1n}det\ A_{1n}$ **Determinante** von A , wobei A_{ij} die $(n-1)\times(n-1)$ Matrix bezeichnet, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.

Bemerkung

Man schreibt auch $det\ A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Beispiel

$$n=3: \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) - a_{12} \cdot (a_{21} a_{33} - a_{23} a_{31}) + a_{13} \cdot (a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31})$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}$$

Merkregel

(nur für $n=3\,!$) Regel von SARRÜS

$$\begin{array}{ccccc} + & + & +\,- & - & - \\ \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{33} \end{array} \quad \Rightarrow \quad a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}$$

Beispiel

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot \left(-1 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \right) + \left(1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= 2 \cdot (-(-8+1) + 3(-3-4)) + (-3 + 3 \cdot (-9)) = 2 \cdot (7-21) + (-30) = -58$$

Satz

A sei $(n \times n)$ Matrix. Für die Berechnung von $det\ A$ gilt:

i. Multipliziert man eine Zeile von A mit einer Konstanten $\neq 0$, multipliziert sich auch $det\ A$ mit diesem Faktor.

ii. Vertauscht man Zeilen oder Spalten von A, ändert $det\ A$ das Vorzeichen.

iii. Bei Addition von Vielfachen einer Zeile zu einer Anderen ändert sich $det\ A$ **nicht**.

Beispiel

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -21 & -22 & -23 & -24 \\ -1 & 4 & 36 & 5 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \cdot(\text{-}1) \\ + \\ \\ \\ \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ -21 & -22 & -23 & -24 \\ -1 & 4 & 36 & 5 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ + \quad \cdot 5 \\ \qquad + \\ \\ \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 36 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 36 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Definition

- Eine $(n \times n)$ Matrix A mit $det\, A \neq 0$ heißt **regulär**.
- Eine $(n \times n)$ Matrix A mit $det\, A = 0$ heißt **singulär**.

Satz

Reguläre Matrizen A besitzen eine inverse Matrix A^{-1} mit $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

Folgerung

Die regulären $(n \times n)$ Matrizen bilden eine Gruppe bezüglich Matrixmultiplikation.

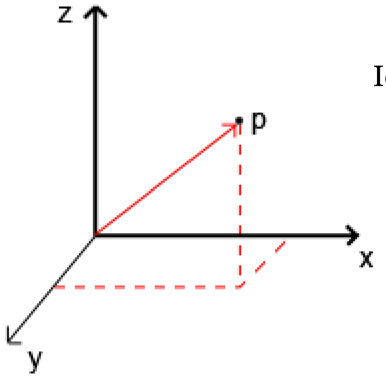
Bemerkung

Die regulären Matrizen bilden auch Körper bezüglich $+$ und Matrixmultiplikation.

4. Vektorräume

4.1 Vektoren im Anschauungsraum

4.1.1 Punkte im R³



Identifiziere Punkt $\vec{p}$ im $\mathbb{R}^3$ mit seinen 3 Koordinaten.

$$x, y, z: \ \vec{p}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

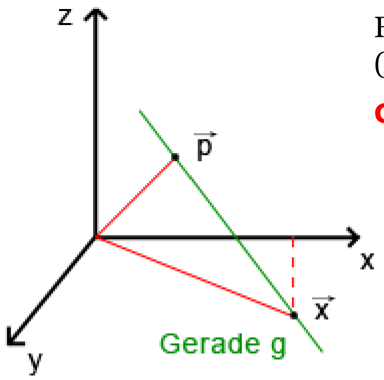
Operationen mit Spezialvektoren:

- Multiplikation mit Zahl $\lambda \in \mathbb{R}: \ \lambda \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$ "Verlängern/Verkürzen von $\vec{p}$ ".
- Addition von zwei Vektoren $\vec{p} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \ \vec{q} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}: \ \vec{p} + \vec{q} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$ "Aneinanderfügung von Vektoren".

Satz

Die Menge der Vektoren des $\mathbb{R}^3$ bildet eine abelsche Gruppe bezüglich $+$ mit neutralem Element $\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4.1.2 Geraden- und Ebenengleichung



Für alle $\vec{x} \in g$ gilt: $\vec{x} - \vec{p} = \lambda \cdot \vec{v}, \ \lambda \in \mathbb{R}, \vec{v}$ fester Vektor (Richtungsvektor).

Geradengleichung

$\Rightarrow \ \vec{x} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{v}$ mit $\vec{p} \in g, \ \vec{v}$ Richtungsvektor von $g \ \ \lambda \in \mathbb{R}$

Beispiel

i. $g: \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}$ Liegt $\vec{p}_1=\begin{pmatrix}3\\-6\\2\end{pmatrix}$ auf g ?

Einsetzen $\begin{pmatrix}3\\-6\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$ $\begin{aligned}&2=-\lambda &&\Rightarrow \lambda=-2 \checkmark\\ &-6=3\lambda &&\Rightarrow \lambda=-2 \checkmark\\ &0=0 \checkmark\end{aligned}$

$\Rightarrow$ $\vec{p}_1$ liegt auf g, liegt $\vec{p}_2=\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}$ auf g ?

Einsetzen $\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$ $\begin{aligned}&-1=-\lambda &&\Rightarrow \lambda=1\\ &4=3\lambda &&\Rightarrow \lambda=\frac{4}{3}\\ &0=0\end{aligned}$ $\Rightarrow \vec{p}_2\notin g$

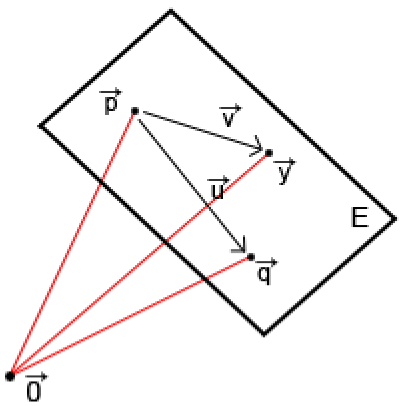
ii. $g_1: \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$ Schneiden sich g_1 und g_2 ?

$g_2: \vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

Gleichsetzen: $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

Komponenten: $\begin{aligned}-\lambda+0\mu=-2 &\Rightarrow \lambda=2\\ 2\lambda-\mu=-1 &\Rightarrow \mu=5\\ -\lambda+0\mu=-2 &\Rightarrow \lambda=2\end{aligned}$

$\Rightarrow$ g_1 und g_2 schneiden sich in $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\5\\-1\end{pmatrix}$



Ebenengleichung

$\vec{x}=\vec{p}+\lambda\cdot\vec{u}+\mu\cdot\vec{v}$ mit $\vec{p}\in E$,
$\vec{u},\vec{v}$ Richtungsvektoren, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

$\vec{u}=\vec{q}-\vec{p}$; $\vec{v}=\vec{y}-\vec{p}$

Beispiel

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$; Komponenten:

$$\begin{aligned}
x &= 1+\lambda+\mu &&\Rightarrow x = 1+(z-1)+(y-1) = y+z-1\\
y &= 1 \quad +\mu &&\Rightarrow \mu = y-1\\
z &= 1+\lambda &&\Rightarrow \lambda = z-1\\
&\boxed{x-y-z+1=0}
\end{aligned}$$

Beispiel

Schnittpunkt Gerade/Ebene

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$$

Gleichsetzen:

$$\begin{array}{lcll}
3+\gamma = 1+\lambda+\mu & & \lambda+\mu-\gamma = 2 & |\cdot(-1)\\
2+2 = 1 \quad +\mu & \Leftrightarrow & \mu-2\gamma = 1 & +\\
1-2\gamma = 1+\lambda & & \lambda \quad +2\gamma = 0 &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\lambda+\mu-\gamma &= 2\\
\mu-2\gamma &= 1 \quad +\\
-\mu+3\gamma &= -2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda+\mu-\gamma &= 2 &&\Rightarrow \lambda = 2\\
\mu-2\gamma &= 1 &&\Rightarrow \mu = 1\\
\gamma &= -1
\end{aligned}$$

Setze $\gamma = -1$ in Geradengleichung ein.

$\Rightarrow$ Schnittpunkt $= \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$

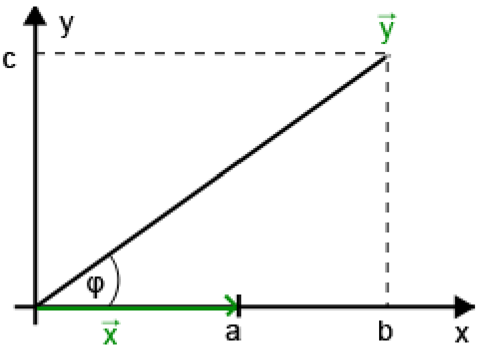
Definition

$\vec{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ seien Vektoren des $\mathbb{R}^3$. Das **Skalarprodukt** von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ ist definitert als $\vec{x}\cdot\vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$

Satz

Es gilt $\vec{x}\cdot\vec{y} = |\vec{x}|\cdot|\vec{y}|\cdot\cos(\sphericalangle \vec{x}, \vec{y})$

"Beweis"



$$\vec{x}=\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix},\quad \vec{y}=\begin{pmatrix}b\\c\end{pmatrix}$$

$$\cos\varphi=\frac{b}{|\vec{y}|}$$

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=a\cdot b=a\cdot\cos\varphi\cdot|\vec{y}|=|\vec{x}|\cdot\cos\varphi|\vec{y}|$$

Folgerung

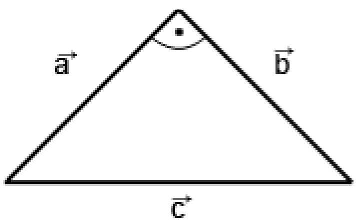
Stehen $\vec{x}$ und $\vec{y}$ senkrecht aufeinander, so ist $\vec{x}\cdot\vec{y}=0$.

Satz

PYTHAGORAS

Für die Katheten $a\,,b$ und die Hypothenuse c eines rechtwinklingen Dreiecks gilt $a^2+b^2=c^2$

Beweis



$$|\vec{e}^2|=|\vec{a}^2|+|\vec{b}^2|$$

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$$

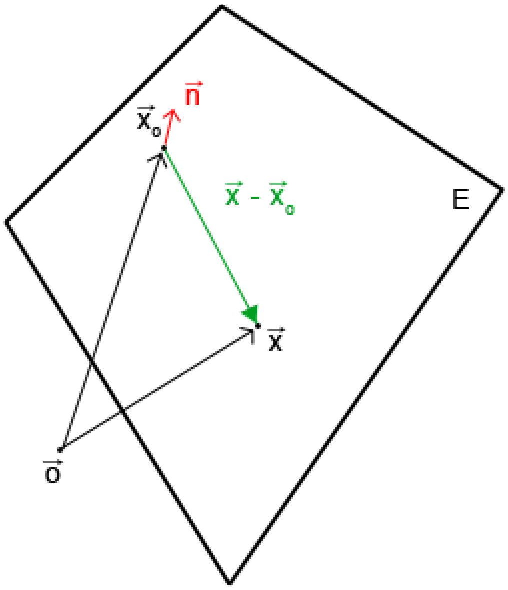
$$\Rightarrow\quad \vec{c}\cdot\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}_{=0}+\underbrace{\vec{b}\cdot\vec{a}}_{=0}+\vec{b}\cdot\vec{b}$$

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \vec{x}\cdot\vec{x}=x^2+y^2=|\vec{x}^2|$$

Satz

HESSE'SCHE NORMALFORM

E sei Ebene in $\mathbb{R}^3$ und $\vec{n}$ ein Vektor der Länge 1 , der auf E senkrecht steht (so genannter **Normaleneinheitsvektor**). Dann gilt für jeden Punkt $\vec{x}$ der Ebene: $\vec{n}\cdot\vec{x}=d$, wobei d Abstand von E zum Ursprung ist.



$\vec{x} - \vec{x}_0$ liegt in E

$\Rightarrow \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) = 0 \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{x}_0$

Da $\vec{x}_0$ beliebiger Vektor $\in E$

$\Rightarrow n \cdot \vec{x}_0 = const$

Berechne die Konstante:

Wähle spezielles $\vec{x}_0$, dass man erhält, wenn man $\vec{n}$ verlängert und mit E schneidet

$$\vec{n} \cdot \vec{x}_0 = \vec{n}(d \cdot \vec{n}) = d \cdot \vec{n} \cdot \vec{n} = d \cdot \underbrace{|\vec{n}^2|}_{=1} = d$$

Beispiel

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ Koordinatenform (siehe oben):

$$x - y - \lambda + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x - y - \lambda}_{= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}} = -1$$

$$\Leftrightarrow \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1$$

$$\Leftrightarrow \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \quad | \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \vec{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \text{Abstand von } E \text{ zum Ursprung.}$$

4.2 Vektorraumbegriff

Im $\mathbb{R}^3$ **:**

Vektoren können addiert werden $\rightarrow$ abelsche Gruppe bezüglich $+$.
Vektoren können mit Zahlen multipliziert werden.

4.2.1 Definition eines Vektorraums

Definition

$(V,+)$ sei abelsche Gruppe mit neutralem Element 0 .
V sei Körper und $\cdot\ : K \times V \rightarrow V$ eine Abbildung.

Dann heißt V **Vektorraum über K**, falls gilt:

$$\left.\begin{array}{ll} (V1) & (\lambda+\mu)\cdot\vec{v}=\lambda\cdot\vec{v}+\mu\cdot\vec{v} \\ (V2) & \lambda\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\lambda\vec{u}+\lambda\vec{v} \\ (V3) & \lambda\cdot(\mu\cdot\vec{v})=(\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{v} \\ (V4) & 1\cdot\vec{v}=\vec{v} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \textit{für alle } \lambda,\mu\in K \\ \textit{für alle } \vec{u},\vec{v}\in V \end{array}$$

Beispiel

i. $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mid x,y,z\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}^3$ ist Vektorraum über $\mathbb{R}$.

$(V,+)$ abelsche Gruppe ✓ $\quad \cdot\ : R\times V\rightarrow V,\ (\lambda,\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix})\rightarrow\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\\\lambda z\end{pmatrix}$ ist Abbildung, weise $(V1)$ bis $(V4)$ nach:

(V1) $(\lambda+\mu)\vec{v}=(\lambda+\mu)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\lambda+\mu)\cdot x\\(\lambda+\mu)\cdot y\\(\lambda+\mu)\cdot z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x+\mu x\\\lambda y+\mu y\\\lambda z+\mu z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\\\lambda z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mu x\\\mu y\\\mu z\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ ✓

(V2) $\lambda\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\lambda(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix})=\ldots=\lambda\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$ ✓

(V3) $\lambda\cdot(\mu+\vec{v})=\lambda\cdot\begin{pmatrix}\mu x\\\mu y\\\mu z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\mu x\\\lambda\mu y\\\lambda\mu z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\lambda\mu)x\\(\lambda\mu)y\\(\lambda\mu)z\end{pmatrix}=(\lambda\cdot\mu)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ ✓

(V4) $1\cdot\vec{v}=1\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot x\\1\cdot y\\1\cdot z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ ✓

ii. $V=\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R}\}\mathbb{R}^n$ ist Vektorraum über $\mathbb{R}$.

iii. $V=\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i \in K\}$ ist Vektorraum über K , falls K Körper.

iv. $V=\{\text{Menge der } (n\times n) \text{ Matrizen über Körper } K\}$ ist Vektorraum über K , denn:
Identifiziere Matrix mit Vektor des $K^{n\cdot m}$.

v. $F=\{f \mid f \textit{ ist Abbildung } \mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$ ist Vektorraum über $\mathbb{R}$
Definiere $+$ und $\cdot$: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
$(\lambda\cdot f)(x)=\lambda\cdot f(x)$

$\Rightarrow (F,+)$ ist abelsche Gruppe (**Beweis**: Übung)
und $\cdot$: $F\times K\to F$ ist Abbildung (klar).

(V1): $((\lambda+\mu)\cdot f)(x)=(\lambda+\mu)\cdot f(x)=\lambda\cdot f(x)+\mu\cdot f(x)=(\lambda f+\mu f)(x)$

(V2): $(\lambda\cdot(f+g))(x)=\lambda\cdot(f+g)(x)=\lambda\cdot(f(x)+g(x))=\lambda\cdot f(x)+\lambda\cdot g(x)=(\lambda f+\lambda g)(x)$

(V3): $(\lambda\cdot(\mu\cdot f))(x)=\lambda\cdot(\mu\cdot f)(x)=\lambda\cdot(\mu\cdot f(x))=(\lambda\cdot\mu)\cdot f(x)=((\lambda\cdot\mu)\cdot f)(x)$

(V4): $(1\cdot f)(x)=1\cdot f(x)=f(x)$

4.2.2 Dimension und Basis

Definition

V sei Vektorraum über K . $\vec{v}_{1,}\vec{v}_{2,}\ldots,\vec{v}_p$ seien Vektoren $\in V$.

- Für Zahlen $a_{1,}a_{2,}\ldots,a_p\in K$ heißt die Summe $a_1\vec{v}_1+a_2\vec{v}_2+\ldots+a_p\vec{v}_p\in V$ **Linearkombination** der $\vec{v}$.
- Die $\vec{v}_i$ heißen **linear abhängig,** falls es eine Zahlenkombination $a_{1,}a_{2,}\ldots,a_p\in K$ gibt, wobei mindestens ein $a_i\neq 0$, so dass $a_1\vec{v}_1+a_2\vec{v}_2+\ldots+a_p\vec{v}_p=\vec{0}$.
- Die $\vec{v}_i$ heißen linear unabhängig, falls gilt:
$a_1\vec{v}_1+a_2\vec{v}_2+\ldots+a_p\vec{v}_p=\vec{0} \Rightarrow a_1=a_2=\ldots=a_p=0$

Beispiel

i. $V=\mathbb{R}^{3,}$ $\vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \vec{v}_2=\begin{pmatrix}-2\\-4\\-6\end{pmatrix}$
$\vec{v}_{1,}\vec{v}_2$ sind linear abhängig, denn: $2\cdot\vec{v}_1+\vec{v}_2=0$

ii. $V=\mathbb{R}^3,\ \vec{v}_1=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\ \vec{v}_2=\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix},\ \vec{v}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}$

Ansatz: $a_1\vec{v}_1+a_2\vec{v}_2+a_3\vec{v}_3=0\Leftrightarrow$

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2a_1 & + & 0a_2 & + & 0a_3 & = & 0 \\ & & 3a_2 & + & 1a_3 & = & 0 \quad |\cdot\frac{1}{3} \\ & & 4a_2 & + & 5a_3 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2a_1 & + & 0a_2 & + & 0a_3 & = & 0 \\ & & a_2 & + & \frac{1}{3}a_3 & = & 0 \quad |\cdot(-4) \\ & & 4a_2 & + & 5a_3 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2a_1 & + & 0a_2 & + & 0a_3 & = & 0 \Rightarrow a_1=0 \\ & & a_2 & + & \frac{1}{3}a_3 & = & 0 \Rightarrow a_2=0 \\ & & & & \frac{11}{3}a_3 & = & 0 \Rightarrow a_3=0 \end{array}$$

$\Rightarrow\ \vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3$ sind linear unabhängig

Bemerkung

i. $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ seien linear abhängig: $a_1\vec{v}_1+a_2\vec{v}_2=0\Leftrightarrow\vec{v}_1=-\frac{a_2}{a_1}\vec{v}_2$

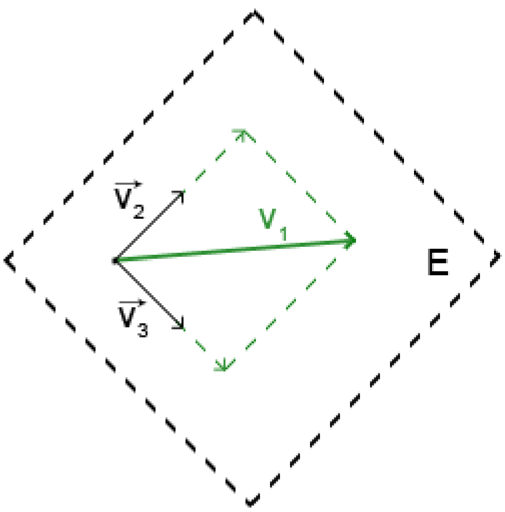
$\Rightarrow$ $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ unterscheiden sich durch konstanten Faktor.

$\Rightarrow$ $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ liegen auf derselben Geraden durch Q .

ii. $v_1,\ v_2,\ v_3$ seien linear abhängig: $a_1\vec{v}_1+a_2\vec{v}_2+a_3\vec{v}_3=0$

$\vec{v}_1=a_1^{-1}(-a_2\vec{v}_2-a_3\vec{v}_3)$

$\Rightarrow$ $\vec{v}_1=c_1\vec{v}_2+c_2\vec{v}_3$ mit $c_1,c_2=const.$



$\vec{v}_1$ liegt in der von $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ aufgespannten Ebene.

$\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_p$ Vektoren eines Vektorraums V .
$a_1\vec{v}_1+a_2\vec{v}_2+\dots+a_p\vec{v}_p=\vec{0}$
$\Rightarrow$ $a_1=a_2=\dots a_p=0:$ $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_p$ linear unabhängig (sonst: linear abhängig).

Folgerung

i. Der Nullvektor $\vec{0}$ ist linear abhängig.

ii. Sind die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ linear abhängig, dann auch jede Menge von Vektoren, die $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ enthält.

Definition

Gibt es eine maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren in einem Vektorraum V, so heißt diese Maximalzahl **Dimension** von V. Gibt es keine Maximalzahl, so heißt V **unendlichdimensional**.

Beispiel

i. $\mathbb{R}^3$ ist 3-dimensional : $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ sind 3 linear unabhängige Vektoren, also

$dim\,\mathbb{R}^3 \geqslant 3$

Seien nun $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ irgendwelche Vektoren des $\mathbb{R}^3$: Ansatz:

$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3 + a_4\vec{v}_4 = \vec{0}$

3 Gleichungen, 4 Unbekannte $\Rightarrow$ Eine Unbekannte bleibt frei wählbar

$\Rightarrow$ $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_4$ linear abhängig

$\Rightarrow$ 3 ist Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren in $\mathbb{R}^3$

ii. $\mathbb{R}^n$ ist n-dimensional $(n \geqslant 1)$

iii. K^n ist n-dimensional (K Körper)

iv. $F = \{f \mid f \text{ ist Funktion } \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ ist unendlichdimensional.

Annahme: Es gibt eine Maximalzahl N von linear unabhängigen Funktionen.

Zeige: Die Funktionen $f_0(x) = 1,\ f_1(x) = x,\ f_2(x) = x^2, \ldots,\ f_n(x) = x^n$ sind linear unabhängig, denn:

Ansatz:
$$a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + \ldots + a_n f_n(x) = \vec{0} \quad \leftarrow \text{Nullvektor}$$
$$a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n x^n = 0 \quad \leftarrow \text{Zahl Null für alle } x \in \mathbb{R}$$

↯

Definition

V sei Vektorraum der Dimension n und $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ linear unabhängiger Vektoren. Dann ist die Menge $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ **Basis** von V.

Folgerung

$B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ Basis von V, lässt sich jeder $\vec{v} \in V$ auf genau eine Weise als linearkombination der $\vec{v}_i$ darstellen.

denn: $\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ linear abhängig $\Rightarrow$ Es gibt $a_i \in K$ mit $a_0\vec{v} + a_1\vec{v}_1 + \ldots + a_n\vec{v}_n = \vec{0}$

$\Rightarrow$ $\vec{v} = a_0^{-1}(a_1\vec{v}_1 + \ldots + a_n\vec{v}_n)$

Definition

V sei n-dimensionaler Vektorraum über K mit Skalarprodukt. Eine Basis $B=\{\vec{v}_{1,}\dots,\vec{v}_n\}$ heißt **Orthogonalbasis**, falls $\vec{v}_i\cdot\vec{v}_0=0$ für $i\neq v$.

Gilt außerdem für alle i : $\vec{v}_i\cdot\vec{v}_i=1$, so heißt B Orthonormalbasis.

Beispiel

Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Satz

Schmidt'sches Orthonormalisierungsverfahren

$B=\{\vec{b}_1,\vec{b}_{2,}\dots,\vec{b}_n\}$ sei Basis eines Vektorraums V . Dann ist die Menge $\{\vec{v}_{1,}\vec{v}_{2,}\dots,\vec{v}_n\}$ mit $\vec{v}_i=\frac{\vec{u}_i}{|\vec{u}_i|}$, $u_i=\vec{b}_i-\sum_{k=1}^{i-1}(\vec{b}_i\cdot\vec{v}_k)\cdot\vec{v}_k(1\le i\le n)$ eine Orthonormalbasis von V .

Beispiel

$$V=\mathbb{R}^2,B=\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}\right\}$$

$$i=1: \quad \vec{u}_1=\vec{b}_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\ \vec{v}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$i=2: \quad \vec{u}_2=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}-\left(\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}-\frac{1}{5}\cdot 2\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{9}{5}\\\frac{18}{5}\end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2=\frac{1}{\sqrt{405}}\cdot\begin{pmatrix}-9\\18\end{pmatrix}$$

5. Lineare Abbildungen

5.1 Erste Eigenschaften

Definition

V, W seien Vektorräume über K. Eine Abbildung $\varphi : V \to W$ heißt **linear**, wenn gilt:
$\varphi(\vec{x}+\vec{y}) = \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y})$ für alle $\vec{x}, \vec{y} \in V$ und $\varphi(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot \varphi(\vec{x})$ für alle $\lambda \in K, \vec{x} \in V$.

Ist eine lineare Abbildung φ bijektiv, so heißt φ **Isomorphismus**.

Beispiel

$V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}^2, \varphi : V \to W, \varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ zy+z \end{pmatrix}$. φ ist linear, denn:

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = \varphi\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ z_1+z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2+y_1+y_2+z_1+z_2 \\ zy_1+zy_2+z_1+z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1+z_1 \\ zy_1+z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2+y_2+z_2 \\ zy_2+z_2 \end{pmatrix}$$

$$= \varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \varphi\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi\left(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \varphi\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x + \lambda y + \lambda z \\ z\lambda y + \lambda z \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x+y+z \\ zy+z \end{pmatrix} = \lambda \cdot \varphi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ φ linear, aber **kein** Isomorphismus (z.B. $\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$)

V, W Vektorräume, $\varphi : V \to W$ heißt **linear** $\Leftrightarrow$ $\varphi(\vec{x}+\vec{y}) = \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y})$, $\varphi(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda \varphi(\vec{x})$

Beispiel

V sei n-dimensionaler Vektorraum über K.
$B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ Basis $\Rightarrow$ Jedes $\vec{x} \in V$ hat eindeutige Darstellung
$\vec{x} = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \ldots + x_n \vec{y}_n$

Definiere Abbildung: $\varphi : V \to K^n, \quad \vec{x} \to \varphi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

φ ist linear $\begin{array}{l}\vec{x}=x_1\vec{v}_1+\ldots+x_n\vec{v}_n\\ \vec{y}=y_1\vec{v}_1+\ldots+y_n\vec{v}_n\end{array}$

$$\Rightarrow \varphi(\vec{x}+\vec{y})=\varphi((x_1+y_1)\vec{v}_1+\ldots+(x_n+y_n)\vec{v}_n)=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\ \vdots\\ x_n+y_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=\varphi(\vec{x})+\varphi(\vec{y})$$

$$\lambda\vec{x}=\lambda x_1\vec{v}_1+\ldots+\lambda x_n\vec{v}_n \Rightarrow \varphi(\lambda\vec{x})=\begin{pmatrix}\lambda x_1\\ \vdots\\ \lambda x_n\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\lambda\varphi(\vec{x})$$

φ ist auch bijektiv $\Rightarrow$ φ Isomorphismus!

φ injektiv: Sei $e(\vec{x})=\varphi(\vec{y}) \Rightarrow \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

φ surjektiv: Sei $\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\in K^n:$ Setze $\vec{a}=a_1\vec{v}_1+\ldots+a_n\vec{v}_n\in V$

$$\Rightarrow \varphi(\vec{a})=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$$

Damit gezeigt:

Satz

Jeder n-dimensionale Vektorraum über K ist isomorph zum K^n .

Definition

$\varphi: V\to W$ sei linear.

Die Menge $\operatorname{Ker}(\varphi)=\{\vec{x}\in V \mid \varphi(\vec{x})=\vec{0}\}$ heißt **Kern** von φ .
Die Menge $\operatorname{Im}(\varphi)=\{\vec{y}\in W \mid \text{Es gibt } \vec{x}\in V \text{ mit } \varphi(\vec{x})=\vec{y}\}$.

Beispiel

$\varphi: \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\ \varphi\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y+z\\ zy+z\end{pmatrix}$, φ ist linear (siehe oben).

Berechne $\operatorname{Ker}(\varphi)=\{x\in\mathbb{R}^3 \mid \varphi(\vec{x})=0\}$

$$=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix}x+y+z\\zy+z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

Lineares Gleichungssystem: $x+y+z=0$

$$zy+z=0 \;\Rightarrow\; y=-\frac{z}{z} \quad \text{Setze } z=\lambda\in\mathbb{R} \text{ beliebig}$$

$$\Rightarrow\; y=-\frac{\lambda}{z}$$

$$\Rightarrow\; \vec{x}=\lambda\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix},\; \lambda\in\mathbb{R} \;\Rightarrow\; \text{Kern ist Gerade durch } \vec{0} \text{ mit Richtung } \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

Sei jetzt $\vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ beliebig. Gibt es $\vec{x}$ mit $\varphi(\vec{x})=y=?$

$\begin{pmatrix}x+y+z\\2\mathrm{y}+z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} \;\Rightarrow$ lineares Gleichungssystem:

$$x+y+z=a_1$$

$$2\mathrm{y}+z=a_2 \;\Rightarrow\; y=\frac{a_2-z}{2},\quad z=\lambda\in\mathbb{R} \text{ beliebig}$$

$$\Rightarrow\; x=a_1-\lambda-\frac{a_2-z}{2}$$

$\Rightarrow$ Es existiert Lösung $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ für jedes $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \;\Rightarrow\; \operatorname{Im}(\varphi)=\mathbb{R}^2$

Satz

$\varphi: V\to W$ linear,
$\operatorname{Ker}(\varphi)$ ist selbst Vektorraum, ein so genannter Teilraum von V .
$\operatorname{Im}(\varphi)$ ist selbst Vektorraum, Teilraum.

Definition

Die Dimension von $\operatorname{Im}(\varphi)$ heißt Rang von φ (abgekürzt $Rg(\varphi)$).

Satz

$\varphi: V\to W$ linear.
$dim(\operatorname{Ker}(\varphi))+dim(\operatorname{Im}(\varphi))=dim\,V$

Beispiel

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+z \\ 2x+y \\ -x+y+z \end{pmatrix}$$

Berechne $\operatorname{Ker}(\varphi)$:

$$\begin{aligned} x+2y+z&=0 \\ 2x+y&=0 \\ -x+y+z&=0 \end{aligned}$$

$$x+2y+z=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{4}{3}\lambda-\lambda=\frac{1}{3}\lambda$$

$$-3y+2z=0 \quad \Rightarrow \quad y=-\frac{2}{3}z\,, \quad \text{setze } z=y \quad \Rightarrow \quad y=-\frac{2}{3}\lambda$$

$$\Rightarrow \quad \vec{x}=\lambda\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad dim \ \operatorname{Ker}\varphi=1$$

$$\Rightarrow \quad dim \ \operatorname{Im}\varphi=3-1=2$$

Satz

$\varphi : V \to W$ linear.

Gilt $dim\,V=dim\,W=dim(\operatorname{Im}(\varphi))$, so ist φ bijektiv.

5.2 Matrizen und lineare Abbildungen

5.2.1 Von Matrizen zu linearen Abbildungen

A sei $(m\times n)$ Matrix über K .

$\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ sei Vektor des K^n . Fasse $\vec{x}$ als $(n\times 1)$ Matrix auf.

Bilde Matrixprodukt $A\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}x_k \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk}x_k \end{pmatrix}\in K^m$

$\Rightarrow$ Definiere Abbildung $\varphi_A : K^n \to K^m$ durch $\vec{x}\to\varphi_A(\vec{x}):=A\cdot\vec{x}$.

Man kann zeigen φ_A ist linear.

Beispiel

$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$ Berechne $\varphi_A(\vec{x})$ für $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

$$\varphi(\vec{x})=A\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\17\\26\end{pmatrix}$$

$A(m\times n)$ Matrix $\Rightarrow$ Konstruiere lineare Abbildung $\varphi_A: K^n\to K^m$ durch $\vec{x}\to\varphi_A(\vec{x})=A\cdot\vec{x}$.

5.2.2 Von linearen Abbildungen zu Matrizen

$\varphi: K^n\to K^m$ sei lineare Abbildung. $B=\{\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_n\}$ sei Basis des K^n .

$\Rightarrow$ Jedes $\vec{x}\in K^n$ hat Darstellung $\vec{x}=x_1\vec{b}_1+x_2\vec{b}_2+\ldots+x_n\vec{b}_n$.

$\Rightarrow$ $\varphi(\vec{x})=\varphi(x_1+\vec{b}_1+\ldots+x_n+\vec{b}_n)=\varphi(x_1+\vec{b}_1)+\ldots+\varphi(x_n+\vec{b}_n)=x_1\varphi(\vec{b}_1)+\ldots+x_n\varphi(\vec{b}_n)$

$\Rightarrow$ φ wird vollständig durch die n Vektoren $\varphi(\vec{b}_1),\ldots,\varphi(\vec{b}_n)\in K^m$ beschrieben.

Schreibe die n Vektoren nebeneinander als Spaltenvektoren in Matrix

$$A_\varphi=\left(\varphi(\vec{b}_1)\ldots\varphi(\vec{b}_n)\right)$$

Beispiel

$\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$

$\varphi(\vec{x})=\begin{pmatrix}x+y+z\\ 2y+z\end{pmatrix}$ $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

$$\Rightarrow \varphi\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \varphi\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ \varphi\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow A_\varphi=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

Berechne $\varphi\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+4+5\\ 2\cdot4+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\13\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+4+5\\ 2\cdot4+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\13\end{pmatrix}$$

5.2.3 Folgerungen

Satz

$\varphi: K^n \to K^m$ sei lineare Abbildung, A_φ die dazugehörige Matrix.

- Der Kern von φ ist die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystem $A_\varphi \cdot \vec{x} = \vec{0}$.
- Der Rang $\left(= dim\left(\mathrm{Im}(\varphi)\right)\right)$ von φ ist die Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren von A_φ .

Beweis

i. Klar.

ii. $A_\varphi = \left(\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_n\right), \ \varphi(\vec{x}) = A_\varphi \cdot \vec{x} = A_\varphi \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \vec{b}_i$ mit $B = \left\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_i\right\}$ Basis

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \left(A_\varphi \cdot \vec{b}_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \varphi(\vec{b}_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \vec{a}_i$$

$\Rightarrow \ \varphi(\vec{x}) \in \mathrm{Im}(\varphi)$ ist Linearkombination der Spaltenvektoren-
$\Rightarrow \ dim\left(\mathrm{Im}(\varphi)\right) =$ Anzahl der linear unabhängigen Spaltenvektoren.

Bemerkung

Die Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren in einer Matrix A heißt **Spaltenrang** von A
Die Anzahl linear unabhängiger Zeilen in einer Matrix A heißt **Zeilenrang** von A .

Man kann zeigen: Spaltenrang = Zeilenrang.
Spreche deshalb immer nur vom **Rang** einer Matrix.

Satz

$\varphi: K^n \to K^n$ sei lineare Abbildung, A_φ die dazugehörige $(n \times n)$ Matrix.
Dann gilt: φ invertierbar $\Leftrightarrow$ A_φ invertierbar $\Leftrightarrow$ $det\, A_\varphi \neq 0$ $\Leftrightarrow$ Rang $(A_\varphi) = n$ $\Leftrightarrow$
Das lineare Gleichungssystem $A_\varphi \cdot \vec{x} = \vec{b}$ besitzt eindeutige Lösung $\vec{x}$ für alle $\vec{b}$.

Beispiel

$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}$ Berechne Rang A :

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ - \\ - \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \mid \cdot(-2) \\ + \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ 3 linear unabhängige Zeilenvektoren

$\Rightarrow$ Rang $A=3$ $\Rightarrow$ A invertierbar $\Rightarrow$ φ_A invertierbar und Rang$(\varphi_A)=3$.

5.3 Eigenwerte und Eigenvektoren

5.3.1 Allgemeines

Definition

$\varphi: K^n \rightarrow K^n$ sei lineare Abbildung $\vec{x}\in K^n$ heißt Eigenvektor von φ $\Leftrightarrow$ $\varphi(\vec{x})=\lambda\cdot\vec{x}$ mit einem $\lambda\in K$. λ heißt Eigenwert zum Eigenvektor $\vec{x}$.

Bemerkung

Definiere analog für $(n\times n)$ Matrizen A : $\vec{x}$ ist Eigenvektor, falls $A\cdot\vec{x}=\lambda\cdot\vec{x}$.

Satz

Zu einem Eigenwert λ existieren maximal n linear unabhängige Eigenvektoren.

5.3.2 Berechnung

A sei $(n\times n)$ Matrix. Suche Eigenvektoren $\vec{x}$ von $A:$ $A\cdot\vec{x}=\lambda\cdot\vec{x}=\lambda\cdot E\cdot\vec{x}$

$$\Rightarrow A\cdot\vec{x}-\lambda\cdot E\cdot\vec{x}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow (A-\lambda E)\cdot\vec{x}=\vec{0}$$

$\Rightarrow$ Homogenes Gleichungssystem für $\vec{x}$, nichttriviale Lösungen, falls:

$$\boxed{\det(A-\lambda E)=0}$$

Satz

A sei $(n\times n)$ Matrix über K . $\lambda\in K$ ist genau dann Eigenwert von A , falls $det(A-\lambda E)=0$.

Bemerkung

$det(A-\lambda E)=0$ heißt charakteristische Gleichung der Matrix A .

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\det(A-\lambda E)$ ist Polynom n -ten Grades in λ (sog. **charakteristisches Polynom**).

Beispiel

$n=4, \quad K=\mathbb{R}$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -\lambda & -1 \\ 2 & -4 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ -4 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)^2\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(2-\lambda)^2(\lambda^2+1)\overset{!}{=}0$$

$\Rightarrow$ $\lambda=2$ einziger reeller Eigenwert.

Berechne Eigenvektoren zu $\lambda=2$: $(A-2E)\vec{x}=0$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & 0 \\ 1 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-2) \\ + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \Rightarrow x_1-2x_2-2x_3-x_4=0 \\ \Rightarrow 5x_3=0 \Rightarrow x_3=0 \end{array}$$

Setze $x_2=s, \ x_4=t$

$\Rightarrow$ $x_1=2s+t$

$\Rightarrow$ Eigenvektoren haben die Form $\vec{x}=\begin{pmatrix} 2s+t \\ s \\ 0 \\ t \end{pmatrix}=s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Beispiel

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad K=\mathbb{R}$$

$a_{ij}=a_{ji}$ $\Rightarrow$ A **symmetrische** Matrix.

$$det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\big((-1-\lambda)(2-\lambda)\big)-2\big(2\cdot(2-\lambda)\big)=(2-\lambda)\big((1-\lambda)(-1-\lambda)-4\big)$$

$$=(2-\lambda)(\lambda^2-5)\stackrel{!}{=}0$$

$\Rightarrow\ \lambda_1=2,\ \lambda_2=\sqrt{5},\ \lambda_3=-\sqrt{5}$ (3 reelle Eigenwerte)

Satz

A sei $(n\times n)$ Matrix über K .

i. Für $K=\mathbb{C}$ hat A genau n Eigenwerte, falls man vielfache Eigenwerte mehrfach zählt.

ii. Ist A symmetrisch hat A auch für $K=\mathbb{R}$ genau n Eigenwerte.

Outtakes

Schmitz schreibt ellenlange Formeln an die Tafel.
Student: Gut, dass wir das jetzt alle verstanden haben...
Schmitz: Ja, das ist doch schön!
Schmitz dreht sich um und macht ungerührt weiter.

Schmitz: Der Dalai Lama sagte mal, es gibt 3 Stufen der Erkennnits: »Klar?«, »Klar!« und »Klar.«... Aber das ist gar nicht vom Dalai Lahma, sondern von mir. Ich wollte nur, dass sie mir zuhören.