Angewandte Mathematik Skript

Für die Vorlesung von Prof. Schmitz

Von Michael Barth
www.little-things.de

Dank an Patrick Bader

Table of Contents

6. Graphen und Bäume 3
6.1 Graphen 3
6.1.1 Grundlegende Definitionen 3
6.1.2 Zusammenhängende Graphen 4
6.2 Bäume 7
6.2.2 Spannbäume 8
6.3 Graphentheoretische Probleme 9
6.3.1 Tourenprobleme 9
6.3.2 Optimierungsprobleme 13
6.3.3 Topologische Sortierung 15
7. Wahrscheinlichkeitstheorie 18
7.1 Kombinatorik Grundlagen 18
7.2 Ereignismengen und Wahrscheinlichkeiten 21
7.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit 23

6. Graphen und Bäume

6.1 Graphen

6.1.1 Grundlegende Definitionen

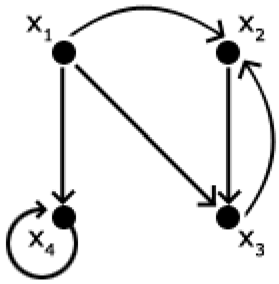
Definition

Ein Graph G ist ein Paar $G=(V, E)$. $V \neq \emptyset$ ist die **Knotenmenge** (engl. *Vertex Set*). E ist die **Kantenmenge** (engl. *Edges*).

Formal ist $V=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ und $E \subseteq \{\{x_i, x_j\} \mid x_i, x_j \in V\}$ oder $E \subseteq \{(x_i, x_j) \mid x_i, x_j \in V\}$ $(=V \times V)$. Im ersten Fall heißt G **ungerichtet**, im zweiten **gerichtet**.

Beispiel

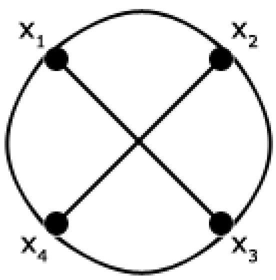
i. $G=(V, E)$ mit $V=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$,
$E=\{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_4, x_4), (x_3, x_2)\}$



$d^+(x_1)=3,\ d^-(x_1)=0$
$d^+(x_2)=1,\ d^-(x_2)=2$
$d^+(x_3)=1,\ d^-(x_3)=2$
$d^+(x_4)=1,\ d^-(x_4)=2$

$\sum d^+(x_i)=\sum d^-(x_i)=6=$ Anzahl der Kanten

ii. $V=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $E=\{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_3, x_4\}, \{x_4, x_1\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_4\}\}$



$d(x_1)=3=d(x_2)=d(x_3)=d(x_4)$
$\sum d(x_i)=12=2\cdot$ Anzahl Kanten

vollständig, schlingenfrei

Definition

Zwei Knoten einer Kante heißen **benachbart**. $G=(V, E)$ gerichtet, dann heißt:

- die Anzahl Pfeile, die von einem $x_i \in V$ ausgehen, **Ausgangsgrad** $d^+(x_i)$.
- die Anzahl Pfeile, die in einen $x_i \in V$ eingehen, **Eingangsgrad** $d^-(x_i)$.

Ist G ungerichtet, dann heißt die Anzahl der Kanten, die einen Knoten $x_i \in V$ enthalten, der **Grad** des Knotens $d(x_i)$.

Satz

$G=(V,E)$ sei Graph mit $V=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. E enthalte k Kanten.

1) Ist G ungerichtet, so gilt $\sum_{i=1}^{k} d(x_i)=2\text{k}$

2) Ist G gerichtet, so gilt $\sum_{i=1}^{k} d^{+}(x_i)=\sum_{i=1}^{k} d^{-}(x_i)=k$

Beweis

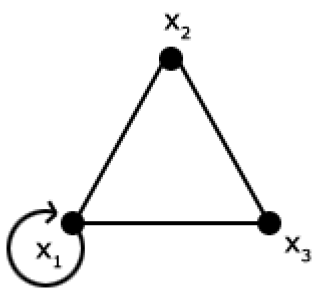
1) Jede Kante verbindet 2 Knoten miteinander und wird deshalb zweimal gezählt. Deshalb $\sum d(x_i)=2\text{k}$.

2) Jede Kante geht von genau einem Knoten aus, wird deshalb genau einmal gezählt. $\Rightarrow \sum d^{+}(x_i)=k$. Analog $\Rightarrow \sum d^{-}(x_i)=k$.

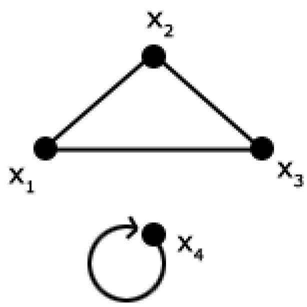
Definition

- Ein Graph heißt **schlingenfrei**, wenn jede Kante verschiedene Knoten verbindet.
- Ein ungerichteter Graph heißt **vollständig**, wenn je zwei Knoten durch eine Kante verbunden sind.

Beispiel



vollständig, nicht schlingenfrei



nicht vollständig, nicht schlingenfrei

6.1.2 Zusammenhängende Graphen

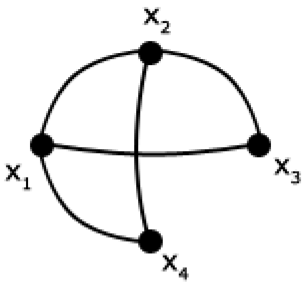
Definition $G=(V,E)$ sei ungerichteter Graph

- Eine Folge $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ von Knoten $\in V$ heißt **Weg** in G , falls $\{x_1, x_2\}$, $\{x_2, x_3\}$, $\ldots\{x_k-1, x_k\}$ Kanten $\in E$ sind.
- Ein Weg $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ **verbindet** x_1 mit x_k . Die Länge des Weges ist die Anzahl $k-1$ seiner Kanten.
- Ein Weg $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ heißt **Kreis** in G , falls $x_1=x_k$.
  Graphen, die keine Kreise enthalten, heißen **kreisfrei**.

Bemerkung

Auch für gerichtete Graphen möglich, dort heißen Kreise **Zyklen**.

Beispiel



$(x_2, x_3, x_1, x_4, x_2)$ ist Weg der Länge 4 und sogar Kreis.
(x_1, x_3, x_2, x_4) ist Weg der Länge 3.
(x_1, x_2, x_3, x_4) ist kein Weg!

$d(x_3, x_4)=2$, ansonsten $d(x_i, x_j)=1$

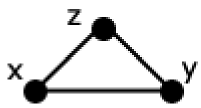
Definition

- Ein ungerichteter Graph $G=(V, E)$ heißt **zusammenhängend** (*connected*), falls für jedes Knotenpaar (x_i, x_j) ein Weg existiert, der x_i mit x_j verbindet.
- Die Länge des kürzestmöglichen Weges, der x_i mit x_j verbindet, heißt **Abstand** $d(x_i, x_j)$.
- Die Menge $N(x)=\{y \in V \mid d(x, y)=1\}$ heißt **Nachbarschaft** von x .

Satz

G ungerichteter Graph, $x, y \in V$. Die Abstandsfunktion d hat folgende Eigenschaften:

1) $d(x, y)=0 \Leftrightarrow x=y$
2) $d(x, y)=d(y, x)$
3) Dreiecks-Ungleichung: $d(x, y) \leq d(x, z)+d(z, y)$



Bemerkung

$G=(V, E)$ sei ungerichteter Graph. Wir definieren Relation R auf V :

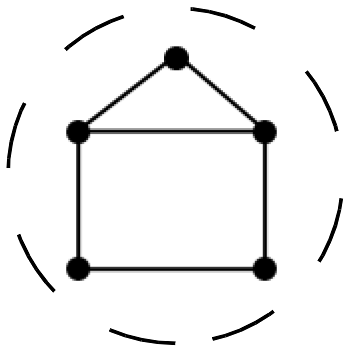
$(x, y) \in R \Leftrightarrow$ Es gibt einen Weg von x nach y .
Dann ist R Äquivalenzrelation auf V !

Definition

Die Äquivalenzklassen dieser Relation heißen **Zusammenhangskomponenten**.

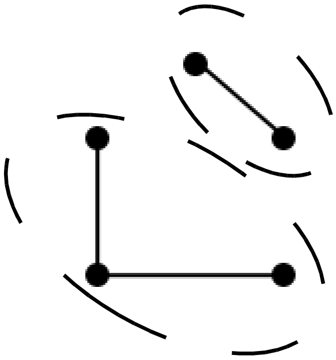
Beispiel

1.



Eine Zusammenhangskomponente!

2.

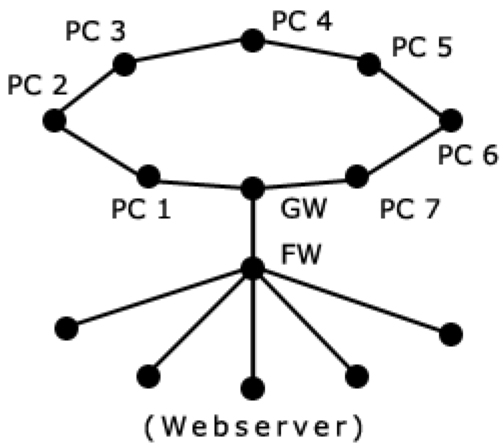


Zwei Zusammenhangskomponenten.

Satz

G zusammenhängend $\Leftrightarrow$ Er besteht aus einer Zusammenhangskomponente.

Beispiel



GW = Gateway,
FW = Firewall

Definition

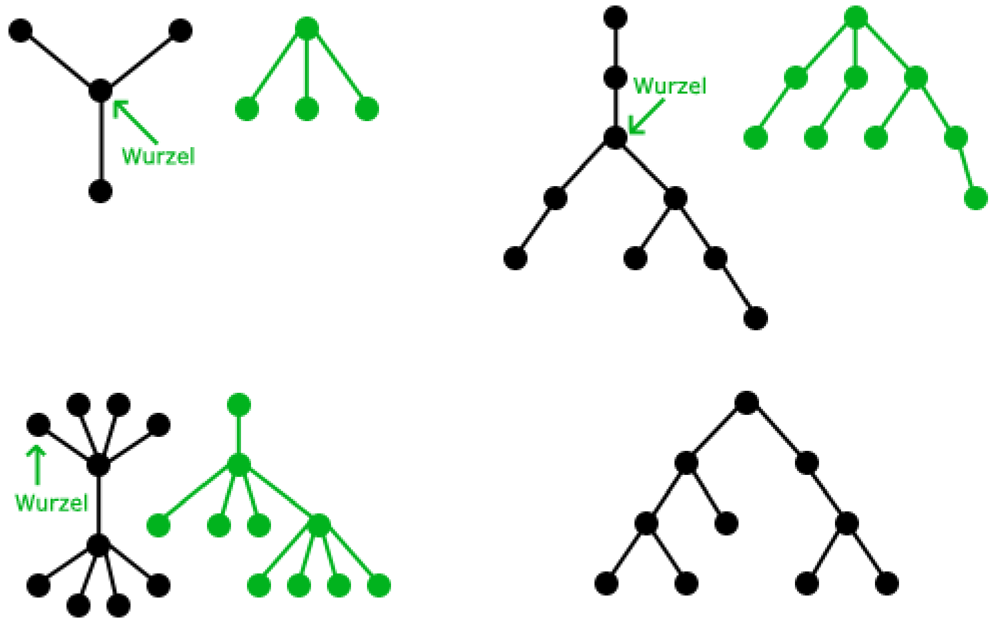
Ein Knoten eines Graphen heißt **trennend**: $\Leftrightarrow$ Nach Herausnahme dieses Knotens hat der Graph mehr Zusammenhangskomponenten als vorher.

6.2 Bäume

Definition

Ein Baum ist ein zusammenhängender, kreisfreier (zyklenfreier), ungerichteter (gerichteter) Graph.

Beispiel



Bemerkung

Geordnete (Wurzel-)Darstellung eines Baumes

- Wähle einen Knoten als Wurzelknoten aus.
- Zeichne alle benachbarten Knoten eine Ebene tiefer.
- usw.

Satz

1) Zwei benachbarte Knoten eines Baumes sind durch genau eine Kante verbunden.
2) Zwei Knoten sind durch genau einen Weg verbunden.
3) Ein Baum mit n Knoten hat genau $n-1$ Kanten.

Beweis

1)

(Graph nicht kreisförmig)

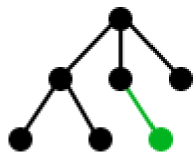
2) Zusammenhängend $\Rightarrow$ Es existiert mindestens ein Weg.
Annahme: Es existieren zwei Wege W_1, W_2. Laufe erst W_1 von x_1 nach x_2 und dann W_2 von x_2 nach x_1 $\Rightarrow$ Kreis $\Rightarrow$ ↯

3) Vollständige Induktion
Annahme: $n=2$

1 Kante

Voraussetzung: Baum mit n Knoten hat $n-1$ Kanten.

Schluss: Zeige: Baum mit $(n+1)$ Knoten hat n Kanten.



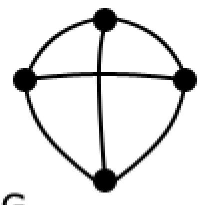
+1 Knoten => +1 Kante
(n Knoten, n-1 Kanten)

6.2.2 Spannbäume

Definition $G=(V,E)$ sei Graph

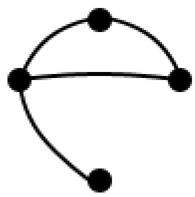
- $\tilde{G}=(\tilde{V},\tilde{E})$ heißt **Teilgraph** von G: $\Leftrightarrow$ $\tilde{V}\subseteq V$ und $\tilde{E}\subseteq E$.
  $\tilde{G}$ heißt **spannender** Teilgraph von G. $\Leftrightarrow$ $\tilde{V}=V$ und $\tilde{E}=E$.
- Ist ein spannender Teilgraph $\tilde{G}$ von G ein Baum T, so heißt T **Spannbaum** von G.

Beispiel

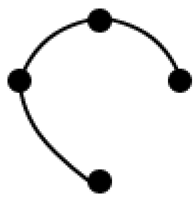


G

Teilgraph (nicht spannend)



spannender Teilgraph (kein Spannbaum)

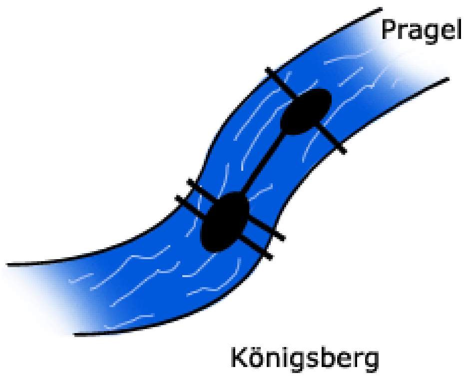


Spannbaum

6.3 Graphentheoretische Probleme

6.3.1 Tourenprobleme

Beispiel

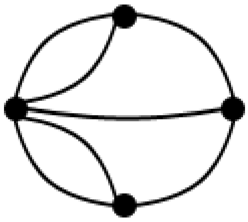


Königsberger Brückenproblem

Ist ein Rundgang möglich, bei dem man jede Brücke genau einmal, benutzt?

(1736 von Leonard Euler gelöst)

Setze um in Graphen:



Gibt es einen Kreis in G, der jede Kante genau einmal enthält?

Bemerkung Ein solcher Kreis heißt **Eulerkreis**.
Graphen mit Eulerkreis heißen **eulersch**.

Satz **EULER**

$G=(V,E)$ eulerscher Graph $\Leftrightarrow$ $d(x)$ gerade für jedes $x \in V$.

Beweis

" $\Rightarrow$ " Es gibt Eulerkreis in G
$\Rightarrow$ Zu jeder Kante, die zu einem Knoten hinführt, existiert auch eine Kante, die herausführt.
$\Rightarrow$ Kanten treten paarweise auf $\Rightarrow$ $d(x)$ gerade für jede Knoten.

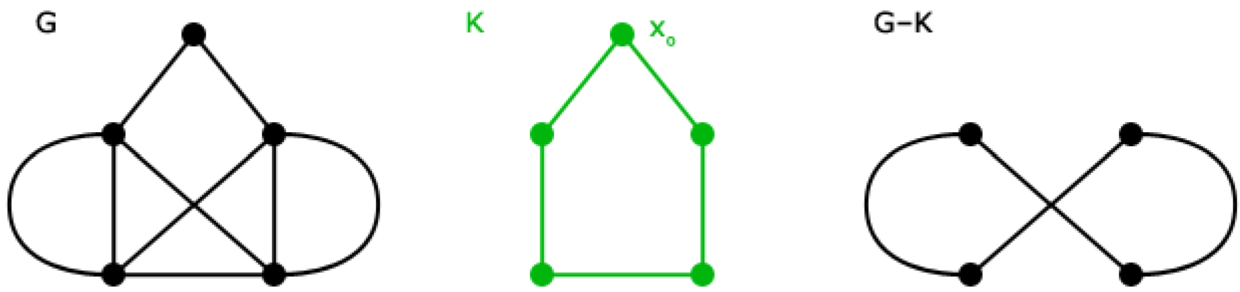
" $\Leftarrow$ " Jeder Knoten von G habe geraden Grad.
Zeige: Es gibt Eulerkreis in G mit vollständiger Induktion. über Anzahl m der Kanten.

Induktions Anfang: $m=2$:  G eulersch ✓

Induktions Annahme: Jeder Graph mit $\leq m$ Kanten mit $d(x)$ gerade für alle $x \in V$ enthält Eulerkreis.

Induktions Schluss: G Sei Graph mit $m+1$ Kanten.
G enthält Eulerkreis.

- Starte bei beliebigem Knoten $x_0 \in V$. Gehe zufälligen Weg K. Benutze dabei solange immer neue Kanten, bis keine neuen Kanten mehr da sind.
- Wenn K am Ende, befinden wir uns wieder in $x_0 \Rightarrow K$ ist Kreis!
- Falls K alle Kanten enthält $\Rightarrow K$ Eulerkreis.
  Falls K nicht alle Kanten enthält, bilde "Restgraphen" $G-K$.
  z.B.



$G-K$ hat weniger als m Kanten und jeder Knoten hat geraden Grad.
Induktions Annahme $\Rightarrow$ $G-K$ eulersch!
$\Rightarrow$ Laufe K von x_0 bis x_1, laufe Eulerkreis in $G-K$ von x_1 nach x_1, laufe von x_1 nach x_0 $\Rightarrow$ Eulerkreis in G.

Definition

Ein Weg in einem ungerichteten zusammenhängenden Graphen, der jede Kante genau einmal benutzt, aber nicht zum Startpunkt zurückkehrt, heißt **Eulerweg**.

Beispiel

Satz

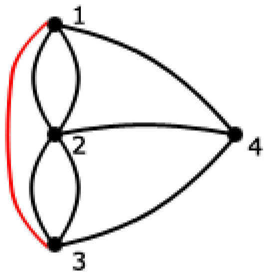
In G existiert ein Eulerweg $\Leftrightarrow$ Es gibt in G genau 2 Knoten mit ungeradem Grad.

Beweis

" $\Rightarrow$ " Es existiert Eulerweg $\Rightarrow$ Weg startet in Knoten mit ungeradem Grad und Weg endet in Knoten mit ungeradem Grad.
Dazwischen laufe Eulerkreis $\Rightarrow$ Es gibt nicht mehr als 2 Knoten mit ungeradem Grad.

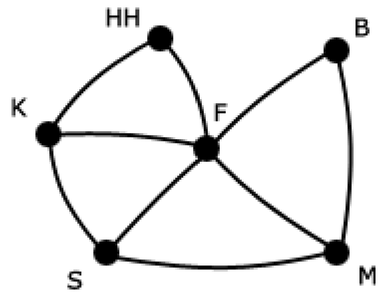
" $\Leftarrow$ " Es gibt genau zwei Knoten mit ungeradem Grad $\Rightarrow$ Es gibt Kante, die diese verbindet.
Streiche diese Kante $\Rightarrow$ Graph eulersch.
$\Rightarrow$ Laufe Eulerkreis der in Knoten mit ungeradem Grad startet, dann nehme gestrichene Kante $\Rightarrow$ Eulerweg.

Beispiel **Königsberg Reloaded**



$\Rightarrow$ Eulerweg: $4 \to 1 \to 3 \to 2 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 2$

Bemerkung **Travelling Salesman Problem (TSP)**



Ist eine Rundtour möglich, die jeden **Knoten** genau einmal besucht?

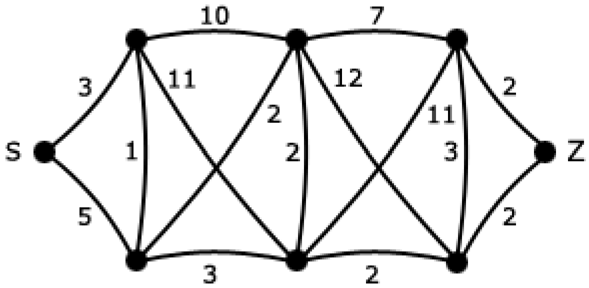
Graphen, in denen dies möglich ist, heißen Hamilton-Graphen.
Vermutung: $NP \neq P$

6.3.2 Optimierungsprobleme

Definition $G=(V, E)$ sei ungerichteter Graph.

Gibt es eine Funktion $f: E \to \mathbb{N}_o$, die jeder Kante von G eine natürliche Zahl (sog. **Gewicht**) zuordnet, so heißt G **gewichteter** Graph.

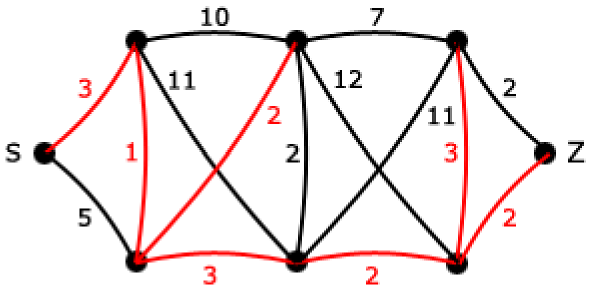
Beispiel Kürzeste Wege



Problem Finde Weg von S nach Z, dessen Kantengewichte die kleinste Summe bilden.

Algorithmus: "Lokales Optimieren"

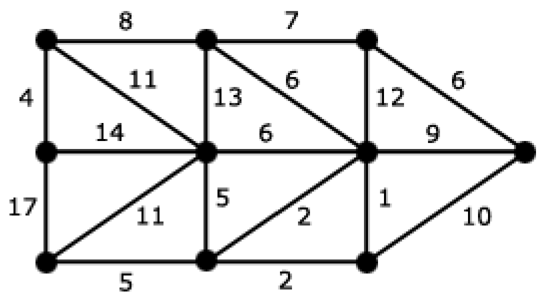
- Gehe immer zu dem Knoten, der mit dem geringsten Aufwand zu erreichen ist.
- Färbe Knoten, für die kürstester Weg von S bereits bekannt ist.



- Betrachte Nachbarknoten der gefärbten Knoten $\Rightarrow$ neue gefärbte Knoten.
- Algorithmusende, falls Z gefärbt.

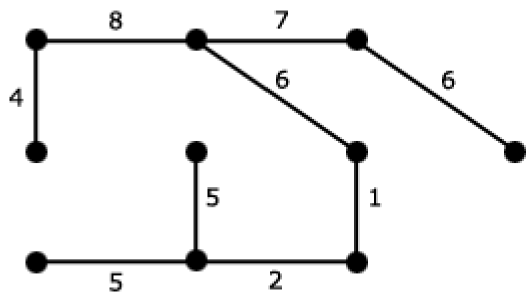
DIJKSTRA-Algorithmus, $O(n^2)$ (n Anzahl der Knoten)

Beispiel Minimale Spannbäume



KRUSKAL-Algorithmus

- Starte mit "Knotengerüst".
- Füge die Kante mit minimalstem Gewicht hinzu, die möglich ist, ohne dass Kreise entstehen.
- Färbe Knoten unterschiedlicher Zusammenhangskomponenten unterschiedlich, verbinde nur unterschiedlich gefärbte Knoten.



Beispiel

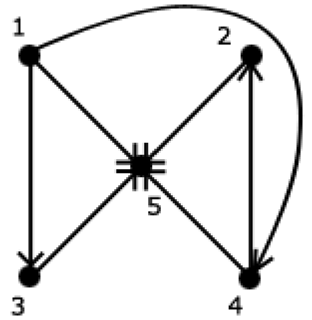
TSP für gewichtete Graphen: Finde kürzeste Rundtour, die jeden Knoten mindestens einmal enthält.

Chinese Postman Problem (CPP): Finde kürzeste Rundtour die jede Kante mindestens einmal enthält (Es gibt Alg $O(n^3)$).

6.3.3 Topologische Sortierung

- Knoten $\hat{=}$ Teilprojekte
- Pfeil von x_i zu x_j $\hat{=}$ x_i voraussetzung für x_j .

Beispiel



1: Mauern

2: Teppich legen

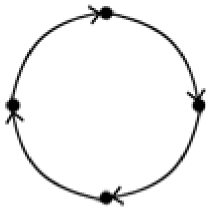
3: Elektrik

4: Dach decken

5: Einzug

- Pfeil von x_i nach x_j $\Leftrightarrow$ x_j von x_i abhängig

Beispiel



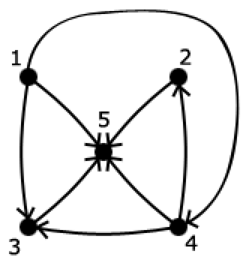
sogenannte "Deadlock"

sortiere so, dass $i<j$

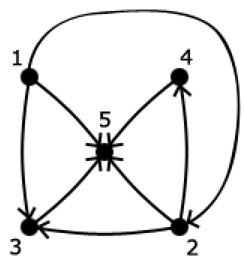
Definition $G=(V,E)$ sei gerichteter Graph.

Eine Permutation $ord: V \to V$ der Knoten heißt **topologische Sortierung**, falls gilt:
$(v,w) \in E \quad \Rightarrow \quad ord(v) < ord(w)$.

Beispiel



nicht topologisch sortiert!



topologisch sortiert!

$ord(1)=1$
$ord(2)=4$
$ord(3)=3$
$ord(4)=2$
$ord(5)=5$

Satz $G=(V,E)$ sei gerichteter Graph.

G besitzt topologische Sortierung $\Leftrightarrow$ G ist zyklenfrei.

Beweis

" $\Rightarrow$ ": G besitzt topologische Sortierung:
Annahme: G enthält Zyklus $x_0 \to x_1 \to \ldots \to x_n \to x_0$
$ord(x_0) < ord(x_1) < \ldots < ord(x_n) < ord(x_0)$ ⚡ $\Rightarrow$ G ist zyklenfrei.

" $\Leftarrow$ ": G ist zyklenfrei. Konstruiere topologische Sortierung via vollständiger Induktion nach $n = \textit{Anzahl der Knoten}$.
$n=1:$ $G:$ $\overset{1}{\bullet}$ $\Rightarrow$ G ist topologisch sortiert.

Vorauss.: Jeder zyklenfreie Graph mit n Knoten besitzt topologische Sortierung.

Schluss: Zeige: Jeder zyklenfreie Graph mit $n+1$ Knoten besitzt topologische Sortierung.

Sei also G zyklenfreier Graph mit $n+1$ Knoten.
$\Rightarrow$ G Enthält Knoten q mit $d^-(q)=0$.

denn: v_1 sei irgendein Knoten.
Ist $d^-(v_1)=0$ $\Rightarrow$ Existiert Knoten v_2 und Kante $(v_{2,} v_1) \in E_i$
Falls $d^-(v_2)=0$ $\Rightarrow$ Existiert Knoten v_3 und Kante $(v_{3,} v_2)$ $\Rightarrow$ $\ldots$
Existiert Kante $v_{n+1} \in V$ und $d^-(n+1)=0$ (sonst ist G nicht zyklenfrei).

Nehme Knoten q mit $d^-(q)=0$ aus G heraus $\Rightarrow$ $G' = G - q$
$\Rightarrow$ G' enthält n Knoten und ist zyklenfrei $\Rightarrow$ G' besitzt top. Sortierung ord' .

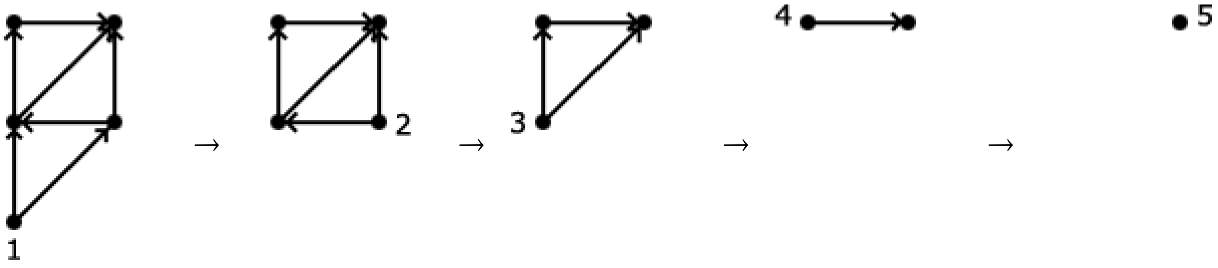
Definiere topologische Sortierung ord für $G:$ Für $v \in V$ setze $ord(v) = \begin{cases} 1 \text{ falls } v=q \\ ord'(v)+1 \text{ sonst} \end{cases}$

Sei $v=q$. Dann gilt $ord(v) = 1 < ord'(w)+1$ für alle Knoten w mit $(q,e) \in E$.
Für $v \neq q$ gilt $ord(v) = 1 + ord'(v) < 1 + ord'(w)$ für alle Knoten w mit $(v,w) \in E$ (da ord' topologische Sortierung).
$\Rightarrow$ ord Ist topologische Sortierung für G ✓
$\Rightarrow$ **Algorithmus:**

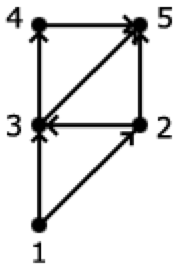
```
i = 0
WHILE (Knoten in Knotenmenge) {

        Suche Knoten x mit  d⁻(x)=0
        Setze ord(x) = i + 1
        Nehme x aus Knotenmenge heraus
}
i++;
```

Beispiel



$\Rightarrow$



7. Wahrscheinlichkeitstheorie

7.1 Kombinatorik Grundlagen

Definition

Für $n \in \{0,1,2,3,\ldots\}$ setzen wir $n! = \begin{cases} 1 \text{ falls } n=0 \\ 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n \text{ falls } n>1 \end{cases}$ (gesprochen n Fakultät).

Satz

Gegeben seien n verschiedene Objekte. Dann gibt es n' verschiedene Möglichkeiten diese Objekte anzuordnen.

Beweis

Für den ersten Platz gibt es n Möglichkeiten, für den zweiten $(n-1)$, usw. $\Rightarrow$ Gesamt $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1$ Möglichkeiten.

Beispiel

Alle Anordungen der Buchstaben H, d, M :

1) HdM 2) HMd 3) MHd 4) MdH 5) dHM 6) dMH

Definition

Sei $n \geq 0$ und $0 \leq k \leq n$. Der **Binominalkoeffizient** $\binom{n}{k}$ ("n über k") ist definiert als $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Beispiel

$$\binom{4}{6} = \frac{6!}{4!(2)!} = \frac{6\cdot 5}{2!} = 15$$
$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\cdot 5!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{6} = 8\cdot 7 = 56$$

Satz

Gegeben seien n verschiedene Objekte. Dann gibt es genau $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten aus den n Objekten k auszuwählen, wenn es nicht auf die Wahlreihenfolge ankommt.

Beweis

$$\left.\begin{array}{l} n \text{ Möglichkeiten, das erste Objekt auszuwählen} \\ (n-1) \text{ Möglichkeiten, das zweite Objekt auszuwählen} \\ \vdots \\ (n-(k-1)) \text{ Möglichkeiten, das } k\text{-te Objekt auszuwählen} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{Gesamt:} \\ n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1)) \\ \text{Möglichkeiten}\end{array}$$

Da Reihenfolge keine Rolle spielt $\Rightarrow$ $\dfrac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}{k!}=\binom{n}{k}$ ✓

Beispiel **Lotto 6 aus 49**

Anzahl Möglichkeiten $=\binom{49}{6}=\dfrac{49\cdot48\cdot47\cdot46\cdot45\cdot44}{6\cdot5\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=13983816$

Beweis

1) $\binom{n}{0}=\dfrac{n!}{0!\cdot n!}=1$, $\binom{n}{n}=\dfrac{n!}{n!\cdot 0!}=1$

2) $\binom{n}{n-k}=\dfrac{n!}{(n-k)!\cdot(n-(n-k))!}=\dfrac{n!}{(n-k)!\cdot k!}=\binom{n}{k}$

3) $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)}+\dfrac{n!}{(k-1)!\cdot(n-(k-1))}=\dfrac{n!\cdot((n+1)-k)}{k!\cdot(n+1-k)}+\dfrac{n!\cdot k}{k!\cdot(n+1-k)}$

$=\dfrac{(n+1)!}{k!\cdot(n+1-k)}=\binom{n+1}{k}$

Folgerung **PASCAL'sches Dreieck**

$$\begin{array}{ccccccccccc} &&&&&1&&&&& \\ &&&&1&&1&&&& \\ &&&1&&2&&1&&& \\ &&1&&3&&3&&1&& \\ &1&&4&&6&&4&&1& \\ 1&&5&&10&&10&&5&&1 \end{array} = \begin{array}{ccccccccccc} &&&&&\binom{0}{0}&&&&& \\ &&&&\binom{1}{0}&&\binom{1}{1}&&&& \\ &&&\binom{2}{0}&&\binom{2}{1}&&\binom{2}{2}&&& \\ &&\binom{3}{0}&&\binom{3}{1}&&\binom{3}{2}&&\binom{3}{3}&& \\ &\binom{4}{0}&&\binom{4}{1}&&\binom{4}{2}&&\binom{4}{3}&&\binom{4}{4}& \\ \binom{5}{0}&&\binom{5}{1}&&\binom{5}{2}&&\binom{5}{3}&&\binom{5}{4}&&\binom{5}{5} \end{array}$$

$n=0$
$n=1$
$n=2$
$n=3$

Satz **Verallgemeinerte binomische Formel**

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\cdot b^{n-k}\qquad(n\geq 0)$$

Beweis **Vollständige Induktion**

Ind. Anfang: $n=0:\quad (a+b)^0=1,\ \sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}a^k\cdot b^{0-k}=\binom{0}{0}a^0\cdot b^0=1\ \checkmark$

Ind. Voraussetzung: $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\cdot b^{n-k}$

Ind. Schluss: Zeige: $(a+b)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k\cdot b^{n+1-k}$

$$(a+b)^{n+1}=(a+b)^n\cdot(a+b)=(a+b)\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\cdot b\,n-k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}\cdot b\,n-k+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\cdot b^{n+1-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k\cdot b^{n+1-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\cdot b^{n-(k-1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n+1}\left(\underbrace{\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}}_{=\binom{n+1}{k}}\right)a^k\cdot b^{n+1-k}+\binom{n}{0}a^0\cdot b^{n+1}+\binom{n}{n}a^{n+1}\cdot b^0$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k\cdot b^{n+1-k}+\underbrace{\binom{n}{0}}_{=\binom{n+1}{0}}a^0\cdot b^{n+1}+\underbrace{\binom{n}{n}}_{=\binom{n+1}{n+1}}a^{n+1}\cdot b^0=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k\cdot b^{n+1-k}\ \checkmark$$

Beispiel

$$(a+x)^5=\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}2^k\cdot x^{5-k}=1\cdot 2^0\cdot x^5+5\cdot 2^1\cdot x^4+10\cdot 2^2\cdot x^3+10\cdot 2^3\cdot x^2+5\cdot 2^4\cdot x+1\cdot 2^5$$

$$=x^5+70\mathrm{x}^4+40\mathrm{x}^3+80\mathrm{x}^2+80\mathrm{x}+32$$

Folgerung

$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$, **denn**: Setze $a=b=1$ in binomischer Formel.

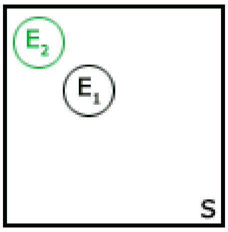
7.2 Ereignismengen und Wahrscheinlichkeiten

Definition

Ein Experiment mit unvorhersehbarem Ausgang, das man beliebig oft wiederholen kann, heißt **Zufallsexperiment**.
Die Menge S aller möglichen Ausgänge eines Zufallsexperiments heißt **Ereignismenge**.
Jede Teilmenge $T \subseteq S$ heißt ein **Ergeignis**.
Die Elemente von S heißen **Elementarereignisse**.

Beispiel

Würfeln mit 2 Würfeln: $s = \{(1,1),(1,2),\ldots,(6,4),(6,5),(6,6)\}$
Betrachte Ereignis $E:$ "Augensumme = 7": $E = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$



$$p(E_1) = \frac{\text{Fläche }(E_1)}{\text{Fläche }(S)}$$

$$p(E_1 \cup E_2) = \frac{\text{Fläche }(E_1) + \text{Fläche }(E_2)}{\text{Fläche }(S)} = p(E_1) + p(E_2) \text{ falls } E_1 \cap E_2 = \emptyset$$

$$p(S) = 1$$

Definition

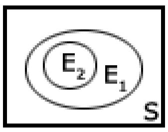
S sei Ereignismenge, $P(S)$ die Menge aller Ereignisse in S.
Eine Funktion $p: P(S) \to [0,1]$ heißt Wahrscheinlichkeitsverteilung, wenn gilt:

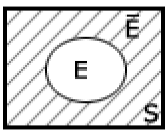
1) $p(S) = 1$
2) Für Ereignisse E_1, E_2 mit $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ gilt $p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2)$

Satz Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $p: P(S) S \to [0,1]$ hat folgende Ergebnisse

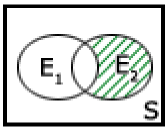
1) $p(\emptyset) = 0$
2) E_1, E_2 Ereignisse $\Rightarrow$ $p(E_1 \setminus E_2) = p(E_1) - p(E_2)$, falls $E_2 \subseteq E_1$
3) E Ereignis $\Rightarrow$ $p(\bar{E}) = 1 - p(E)$
4) E_1, E_2 Ereignisse $\Rightarrow$ $p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)$

Beweis

1) $p(\emptyset) = p(\emptyset \cup \emptyset) = p(\emptyset) + p(\emptyset) \Rightarrow p(\emptyset) = 0$
2) 

$\Rightarrow E_1 = E_2 \cup \{E_1 \setminus E_2\} \Rightarrow p(E_1) + p(E_1 \setminus E_2)$
$\Rightarrow p(E_1 \setminus E_2) = p(E_1) - p(E_2)$
3) 

$S = E \cup \bar{E} \Rightarrow p(S) = p(E) + p(\bar{E}) = 1 \Rightarrow p(\bar{E}) = 1 - p(E)$

4) 

$$E_1 \cup E_2 = E_1 \cup X = E_1 \cup \{E_2 \setminus \{E_1 \cap E_2\}\}$$
$$\Rightarrow \quad p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2 \setminus \{E_1 \cap E_2\})$$
$$= p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)$$

Beispiel

Würfeln mit 2 Würfeln: S besteht aus 36 Elementarereignissen
$E_1 = \{(1{,}6), (2{,}5), (3{,}4), (4{,}3), (5{,}2), (6{,}1)\}$

Erfahrung: Jedes Elementarereignis E ist gleichwahrscheinlich $\Rightarrow$ $p(E) = \frac{1}{36}$

E_1 besteht aus 6 Elementarereignissen $\Rightarrow$ $p(E_1) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$E_2 = \{(1{,}6), (1{,}5), (1{,}4), (1{,}3), (1{,}2), (1{,}1)\}$ *"Erster Würfel zeigt 1"*
$\Rightarrow$ $E_1 \cup E_2 = \{(1{,}1), (1{,}2), \ldots, (1{,}6), (2{,}5), (3{,}4), \ldots, (6{,}1)\}$ $\Rightarrow$ 11 Elementarerignisse
$\Rightarrow$ $p(E_1 \cup E_2) = \frac{11}{36} \neq p(E_1) + p(E_2) = \frac{12}{36}$

Bemerkung

Ein Experiment, bei dem alle Ausgänge gleich wahrscheinlich sind heißt **Laplace-Experiment**.

Satz

Bei einem Laplace-Experiment mit Ereignismenge S gilt für jedes Element E:

$$p(E) = \frac{|E|}{|S|}$$

Beispiel Skat

32 Karten, 3 Spieler, jeder bekommt 10 Karten (Laplace-Experiment).
$s = \{\text{Alle Möglichen Blätter } \textbf{\textit{eines}} \text{ Spielers}\}$, S enthält $\binom{32}{10}$ Elementarereignisse.

$p(\text{mind. ein Ass}) = ?$
$p(\text{mind. ein Ass}) = p(\text{genau ein Ass}) + p(\text{genau 2 Asse}) + p(\text{genau 3 Asse}) + p(\text{genau 4 Asse})$

$$= \frac{4 \cdot \binom{28}{9}}{\binom{32}{10}} + \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{28}{8}}{\binom{32}{10}} + \frac{1 \cdot \binom{28}{6}}{\binom{32}{10}} = 0{,}797$$

$$p(\textbf{\textit{kein}} \text{ Ass}) = \frac{\binom{28}{10}}{\binom{32}{10}} = 0{,}203$$

7.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit

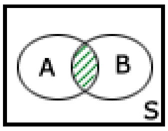
Betrachte Wahrscheinlichkeit für Ereignis A, unter der Bedingung, dass anderes Ereignis B eingetreten ist.

Beispiel Skat

Berechne Wahrscheinlichkeit, dass *Spieler A* zwei Asse hat, unter der Bedingung, dass B zwei Asse hat.

$$p(A|B)=\left(\frac{\binom{2}{2}\cdot\binom{20}{8}}{\binom{22}{10}}\right)=\frac{\frac{20!}{8!\,12!}}{\frac{22!}{10!\,12!}}=\frac{10\cdot 9}{21\cdot 22}=\frac{90}{462}$$

Betrachte allgemeines Laplace-Experiment mit Ereignismenge S.



Info: B ist eingetreten!

$$\left[p(A|B)=\frac{|A\cap B|}{|B|}=\frac{\frac{|A\cap B|}{|S|}}{\frac{|B|}{|S|}}=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}\right]$$ (bei Laplace-Experimenten)